

Моделирование вековых геомагнитных вариаций. Принципы и реализация.

Андрей Хохлов *

12 ноября 2011 г.

Аннотация

В статье приведены современные взгляды на математическую модель вековых вариаций главного магнитного поля Земли и изложен алгоритм ее реализации. Программный код разработан автором и свободно доступен в сети Интернет. В рамках построенной модели можно исследовать появление эффектов, традиционно относимых к нестационарным, например, экскурсов магнитного поля. Помимо этого модель представляется удобной для количественной оценки явлений занижения магнитного наклонения в осадках, а также для уточнения статистических свойств традиционных параметров, используемых в геомагнетизме.

Введение

Основной прогресс в понимании природы вековых вариаций магнитного поля Земли на наш взгляд стал возможным благодаря ясным формулировкам так называемого Гигантского Гауссовского Процесса (в оригинале Giant Gaussian Process), предложенного в качестве модели Р.Паркером и К.Констабл [Constable,Parker 1988] в начале 90-х годов XX века. Дальнейшие уточнения в рамках этой модели сводится к оценкам значений ее параметров с помощью постоянно пополняемых мировых коллекций архео- и палеомагнитных данных (например [MagIC]). Разумеется, эта проверка еще далека от завершенности и множество вопросов лишь ожидают ответа, тем не менее методологический принцип, заложенный в основу модели, похоже, остается неизменным.

Как известно, наблюдаемое магнитное поле Земли непостоянно во времени и характер его вариаций сильно зависит от выбора разрешения (масштаба) [Merrill и др 1996]. Предметом настоящей статьи служат геомагнитные вариации в масштабе от нескольких лет до первых миллионов лет, поиск адекватного их описания с возможностью установления количественных признаков сходства или различий спектрального состава этих вариаций давно привлекает исследователей. В этой статье будет рассказано о возможности сформулировать на языке статистики модель процесса вековых вариаций, в частности о принципах построения синтетических данных, отвечающих этой модели. Кроме того, в таких данных, построенных казалось бы в рамках *гипотезы стационарности*, можно наблюдать эффекты, которые традиционно в рамках геофизического сообщества принято рассматривать как проявления особенного, нестационарного поведения — например, экскурсии магнитного полюса.

Постановка задачи

Общая необходимость поиска адекватной *математической* модели для процесса вековых вариаций вытекает из следующего неформального вопроса: как *количественно* оценить различия (или доказать, что значимых различий нет) в поведении магнитного поля Земли в разные эпохи? Современный естественнонаучный язык использует *измеримость* различий, что в конечном счете выражается в том, что данные соотносятся с некоторой математической моделью и для конкретного набора данных количественно измеряется их соответствие (или несоответствие) модели. В частности, если модель статистическая, то данные следует изучать с точки зрения их вероятностных характеристик, как-то: законы распределения, числовые характеристики, вычисляемые

*МИТП РАН; ГЦ РАН, грант РФФИ 11-05-00601-а

в процессе обработки данных и т.п. Статистически достоверное несовпадение таких характеристик для разных эпох и будет требуемым аргументом о том, что поведение поля было различно. Специфика палеомагнитных данных (как правило содержащих лишь направления векторов без знания их длины, то есть данные не являются векторами, их нельзя непосредственно складывать, усреднять и т.д.) требует использования методов непараметрической статистики, позволяющей проверять теоретическую модель на неполных векторных данных о магнитном поле. В дальнейших публикациях будет рассказано о некоторых результатах автора в области разработки и применения таких методов при гипотезе справедливости модели Констабль-Паркера для вековых вариаций, но в этой статье ограничимся только принципами и геофизическими мотивировками формально-математической стороны конструкции.

Модели Констабль-Паркера (определяемые некоторым набором параметров) в русскоязычной литературе по-видимому следует обозначать БГП (по аналогии с сокращением «Giant Gaussian Process» до GGP в англоязычной литературе), для их описания используется язык теории случайных процессов. По возможности постараемся дополнять формально-математические части нашего текста примерами, которые могут иллюстрировать геофизическую суть дела.

Некоторые особенности статистического подхода в геомагнетизме

Математическая статистика обычно предполагает, что экспериментальные данные составляют *выборку*; неформально говоря, выборка получается в результате последовательности *независимых* измерений при повторении эксперимента в *одних и тех же* условиях. Прикладной смысл этих (выделенных шрифтом) понятий вовсе не очевиден и требует множества пояснений, среди которых выберем следующее: статистическая выборка устроена так, что любое ее подмножество из N элементов должно в принципе обеспечить оценку неизвестных параметров с точностью, зависящей лишь от N (а не от подмножества). Применение статистических формул оценивания к данным, не являющимся выборкой, заведомо приведет к (может быть фатальным) искажениям в ответе, которые отнюдь не исчезнут с ростом объема данных.

Пример

Привычной операцией при работе с данными является представление их в виде гистограмм. Один из простейших эвристических тестов, показывающих, что данные не могут считаться выборкой, состоит в том, чтобы разделить все данные на два одинаковых по числу элементов множества и сравнить вид соответствующих гистограмм. Если две формы существенно (здесь также нужны уточнения) различаются, то это свидетельство нарушения свойств статистической выборки.

Совершенно ясно, что произвольную последовательность измерений магнитного поля Земли нельзя объявить выборкой, хотя бы потому, что наблюдения в близких моментах времени (в близких географических точках) заведомо продемонстрируют близость (и тем самым, зависимость) значений. Поэтому для применимости статистической модели данных в геомагнетизме необходимо специальное предположение, справедливость которого остается ключевым моментом для дальнейших рассуждений. Это основное предположение (увы, нечасто проговариваемое явно) заключается в том, что **в записях Главного Магнитного поля Земли можно выделить временные сегменты и соответствующие размеры шага по времени так, чтобы дискретизованная запись обладала бы всеми свойствами выборки по крайней мере в пределах точности, которую могут обеспечить статистические формулы.** Это предположение на языке случайных процессов может быть сформулировано в терминах свойств *стационарности* и *эргодичности*, а для практических приложений соответствующие интервалы времени принято соотносить с периодами стабильной полярности магнитного поля. Всякий раз, впрочем, требуется предварительный анализ данных с тем, чтобы убедиться в отсутствии или наличии внутренних корреляций в данных.

Таким образом, модель вариаций Констабль и Паркера будет использоваться лишь для интервалов определенной полярности поля, а вопрос о ее более широкой применимости (для промежутков времени, покрывающих не один хрон, или, наоборот, для весьма коротких интервалов на которых корреляции измерений очевидны) остается предметом обсуждения и проверок. В последнем разделе статьи имеется пример построения синтетических данных (рис.2, 3), которые построены для интервала 25000 лет с разрешением 5 лет, очевидно учитывающим корреляцию; отдельный интерес представляет вопрос об их реалистичности в этом масштабе.

Пример

В конкретной ситуации вопрос, подходят ли данные под критерии статистической выборки или нет, остается во многом предметом эвристических рассуждений, для которых на наш взгляд визуализация данных чрезвычайно важна. Например для древних (1097 – 1108 млн лет) данных [Swanson-Hysell и др. 2009] рассмотрение наклонений в последовательных 72 потоках (приведенных к нормальной полярности – исходная нормальная полярность отмечена синими точками, а исходная обратная полярность – красными) дает следующую картинку (рис.1), Здесь наличие

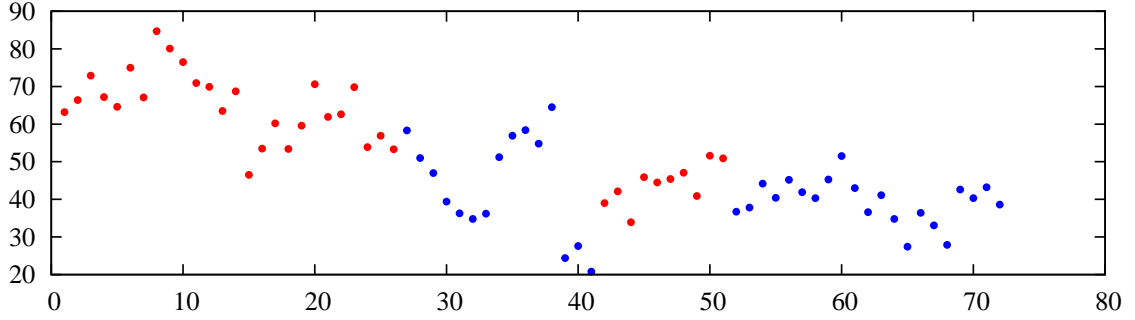


Рис. 1: Приведенные к нормальной полярности данные наклонений из лавовых потоков озера Keweenaw. По горизонтальной оси порядковый номер потока.

корреляций между последовательными наклонениями в соседних потоках видно невооруженным взглядом и оттого вся последовательность отнюдь не похожа на выборку, но зато она дает представление о вековых вариациях в древнюю эпоху. Интересно, что в соответствующей статье [Swanson-Hysell и др. 2009] это обстоятельство никак не отмечено, меж тем автор использовал без ограничений статистические оценки по этим данным. Подобного рода трудности часто (чтобы не сказать – обычно) встречаются и в других статьях.

Вопрос о соответствии набора параметров конкретной модели Констанбль-Паркера реальным данным, решается лишь с помощью статистического теста, примененного к выборке данных. К настоящему времени для современной нам эпохи стабильной полярности Брюнес было предложено несколько моделей, различающихся по своим параметрам; ниже будет подробно рассказано об этих моделях и об исследованиях ведущих к отбору одной модели среди многих.

Описание Главного Магнитного поля Земли в терминах БГП (в терминах модели Констанбль и Паркера)

Напомним, что для краткости будем употреблять (вслед за англоязычной традицией) аббревиатуру БГП для изложенной в [Constable, Parker 1988] конструкции. Предполагая известным общее определение сферической гармоник через многочлены Лежандра и тригонометрические функции, напомним, что в геомагнетизме приняты специальные соглашения и обозначения для многочленов Лежандра, а именно:

$$P_l^m = \begin{cases} P_{l,m} & m = 0 \\ \frac{2(l-m)!}{(l+m)!} P_{l,m} & m > 0 \end{cases}$$

где $P_{l,m}(\cos \theta)$ обозначают *ассоциированные многочлены Лежандра* от аргумента $\cos \theta$, явные формулы для вычисления коэффициентов этих многочленов и значений в конкретных аргументах хорошо известны [Numerical Recipes].

Основная идея использует то, что в области свободной от источников (и в магнитоэстатическом приближении разумеется) Главное магнитное поле Земли может быть построено из потенциала V , который в свою очередь представлен суммой сферических гармоник с коэффициентами:

$$V(\mathfrak{R}, \Theta, \Psi) = a \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{a}{\mathfrak{R}}\right)^{l+1} (g_l^m \cos m\Psi + h_l^m \sin m\Psi) P_l^m(\cos \Theta), \quad (1)$$

где g_l^m and h_l^m обычно называются гауссовыми коэффициентами разложения, а $\{\mathcal{R}, \Theta, \Psi\}$ стандартные географические сферические координаты ¹ (расстояние до центра Земли, коширота и долгота), наконец a обозначает земной радиус. Слагаемые с $l = 1$ называют *дипольными*, с $l = 2$ называют *квадрупольными* и т.д. Для потенциала магнитного поля Земли коэффициенты быстро убывают по абсолютной величине с возрастанием степени l , самым большим, значительно превосходящим прочие коэффициенты, является коэффициент g_1^0 . По-другому этот факт выражают, говоря о «преимущественно дипольном характере» земного магнитного поля. Полный набор коэффициентов, входящих в разложение потенциала, составляет *пространственный спектр* потенциального поля, обычно (см. [Mauersberger 1956]) в качестве энергетической характеристики убывания коэффициентов выбирают величину

$$R_n = (n + 1) \sum_{m=0}^n (g_n^m)^2 + (h_n^m)^2$$

Существует несколько основополагающих гипотез о характере спектра геомагнитного поля при различных временных масштабах рассмотрения (например, при осреднении значений по интервалу времени). Так в частности в палеомагнетизме основной считается *гипотеза осевого диполя* гласящая, что при достаточной длине интервала осреднения поля по времени все коэффициенты, кроме g_1^0 становятся слабоотличимы от нуля и тем самым само поле неотлично от дипольного с полюсами на географическом Севере и географическом Юге. В настоящее время эта гипотеза хоть и составляет предмет обсуждений, но альтернативных гипотез немного. Более тонкие другие гипотезы о характере пространственного спектра в больших промежутках времени в десятки и сотни тысяч лет заведомо представляют большой интерес, но их проверка требует очень больших коллекций данных.

Выражение (1) позволяет описать вариации геомагнитного поля в терминах вариаций «модельного вектора» $\mathbf{k} = \{\mathbf{g}, \mathbf{h}\}$ составленного из гауссовых коэффициентов $\mathbf{g} = \{g_1^0, g_1^1, \dots, g_l^m \dots\}$, $\mathbf{h} = \{h_1^1, h_2^1, \dots, h_l^m \dots\}$. Характер этих вариаций в модели Констабль-Паркера определен тем, что $\mathbf{k} = \{\mathbf{g}, \mathbf{h}\}$ полагается бесконечномерным стационарным эргодическим гауссовским процессом, иными словами любая n -мерная проекция этого вектора есть n -мерный гауссовский процесс (который, как известно, определяется вектором математических ожиданий $E(\mathbf{k})$ и ковариационной матрицей $\text{Cov}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = [\text{cov}(k_\alpha, k_\beta)]$, составленной из элементов $\text{cov}(g_i^j, g_k^l)$, $\text{cov}(h_i^j, h_k^l)$ и $\text{cov}(g_i^j, h_k^l)$), в частности любой коэффициент g_l^m представляет из себя стационарный гауссовский процесс, со своим средним и своей автокорреляционной функцией.

Обсуждение принципов моделирования

Постулат о том, что в модель закладывается именно гауссовский процесс (в частности, все выборки коэффициентов g_l^m , h_l^m должны иметь распределение Гаусса (нормальный закон) в принципе статистически проверяем, но на практике это чрезвычайно трудно осуществимо, поскольку коэффициенты разложения потенциала по сферическим гармоникам непосредственно не наблюдаемы — для их сколь-либо точного вычисления требуется достаточно большой объем наблюдений, подобно тому, как это делается при производстве IGRF-моделей. Этот постулат не противоречит тому, что временные вариации вектора поля в заданной точке дают распределение Гаусса (воот этот факт более-менее проверен), ибо согласно Центральной Предельной Теореме теории вероятностей сумма многих независимых случайных величин сходится к распределению Гаусса при выполнении некоторых достаточно общих условий. Напротив, из гауссовского характера вариаций вектора магнитного поля прямо не следует, что выборки коэффициентов g_l^m , h_l^m должны бы иметь распределение Гаусса, — то есть в модель заложено *дополнительное* предположение, которое в настоящий момент на реальных данных проверять чрезвычайно непросто.

Делались попытки оценить закон распределения коэффициентов g_l^m , h_l^m для синтетических данных, полученных из вычислительных² моделей [Bouligand и др. 2005], однако в этом весьма специальном случае наблюдалось скорее экспоненциальное убывание плотности распределения (то есть наблюдалось распределение Лапласа по форме подобное $\exp(-|x|)$), нежели гауссово убывание (по форме подобное $\exp(-x^2)$). Конечно, это обстоятельство относится не к реальным

¹эти обозначения для географических координат выбраны с учетом того, что в дальнейшем потребуются другие системы локальных сферических координат, отнесенных к географическому положению

²явно использующих эти коэффициенты

данным геомагнитного поля и потому не может служить основанием отбросить саму идею БПП как несостоятельную.

То, что процесс имеет короткую память (то есть быстро убывающую по времени автокорреляционную функцию) согласуется с экспериментом по обработке исторических и археомагнитных записей — см. например, [Hulot, Le Mouél 1994], [Hongre и др. 1998]. Благодаря тому, что как правило палеомагнитные записи по лавам разделены во времени на величину, большую нескольких сотен лет, имеются основания надеяться, что палеомагнитные данные во времени обычно представляют из себя выборку (см. однако (рис.1)). Типичные предположения (однако же заслуживающие дальнейших уточнений) о характеристических временах **памяти процесса** были предложены (см. в [Hulot, Le Mouél 1994], [Hongre и др. 1998]) исходя именно из реальных данных:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2000	451	400	355	315	279	248	220	195	153	173	136	120

Таблица 1: Для различных значений степени n оценки в годах интервала времени, вне которого корреляционная функция процессов $g_n^m(t), h_n^m(t)$ пренебрежимо мала. Зависимости от m не предполагается.

Вид ковариационной матрицы в известных опубликованных моделях (см. далее по тексту) для эпохи Брунес был выбран диагональным, то есть разные коэффициенты разложения по сферическим гармоникам — взаимно некоррелированные случайные процессы. На самом деле это означает наличие довольно естественных симметрий модели относительно системы географических координат $\{\mathcal{R}, \Theta, \Psi\}$, подробнее про это см. [Eckhardt 1984], [Bouligand, Hulot 2005], а также [Hulot, Le Mouél 1994]).

Что касается явного вида корреляционной функции, то здесь есть известный произвол, в настоящий момент неизбежный по причинам невозможности прямого наблюдения коэффициентов разложения, о чем уже говорилось выше. Представляется логичным рассматривать несколько простейших случаев модельных автокорреляционных функций, например, их экспоненциальное и гауссовское убывание по времени, например, положить автокорреляционную функцию для $g_n^m(t)$ (или $h_n^m(t)$) совпадающей с $\mathcal{K}(s) = e^{-\frac{|s|}{\lambda}}$ или $\mathcal{K}(s) = e^{-\frac{1}{2}(\frac{s}{\lambda})^2}$, где значение $\lambda = \lambda_n$ выбирается в соответствии с тем, что в таблице (1) приведена величина $3\lambda_n$ памяти процесса.

Параметры конкретных моделей

Изложенный выше формализм означает, что вековые вариации по крайней мере на уровне рассмотрения выборок палеомагнитных данных предлагается рассматривать как реализацию (в дискретном времени) стационарного гауссовского процесса $\mathbf{k}(t)$. С другой стороны, задание стационарного гауссовского процесса сводится к заданию средних $E(g_i^j)$, $E(h_k^l)$ процесса и элементов ковариационной матрицы $\text{Cov}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = [\text{cov}(k_\alpha, k_\beta)]$. В приложениях имеют место два дополнительных предположения о взаимной независимости элементов и о том, что автокорреляционная функция определяется лишь своей степенью (но не порядком) и в частности:

$$\text{cov}(h_i^j, h_k^l) = \text{cov}(g_i^j, g_k^l) = \delta_{ik}\delta_{jl}\sigma_k^2 \quad (2)$$

$$\text{cov}(g_i^j, h_k^l) \equiv 0 \quad (3)$$

Опубликованные модели CP, QC, CJ, JC и ТК сходны по многим характеристикам. В них все матожидания кроме $E(g_1^0)$ и $E(g_2^0)$ имеют нулевые значения, ковариационная матрица всегда диагональна $\text{Cov}(g_n^m, g_n^m) = \text{Cov}(h_n^m, h_n^m) = (\sigma_n^m)^2$, при этом последняя формула видоизменена в модели JC, для которой $\text{Cov}(g_2^1, g_2^1) = (\sigma(g_2^1))^2$ and $\text{Cov}(h_2^1, h_2^1) = (\sigma(h_2^1))^2$. Во всех моделях кроме одной при $n \geq 3$, параметры σ_n^m не зависят от m и вычисляются по формуле $\sigma_n^m = \sigma_n$, где $\sigma_n = \alpha(c/a)^n / ((n+1)(2n+1))^{1/2}$. Особняком стоит модель ТК, в которой $\sigma_n^m = \sigma_n$ для четных значений $(n-m)$ и $\sigma_n^m = \beta\sigma_n$ для нечетных $(n-m)$. В таблице (2) приведены значения соответствующих параметров. Описание модели CP имеется в [Constable, Parker 1988], соответственно, описания моделей QC, CJ, JC и ТК можно найти в [Quidelleur, Courtillot 1996], [Constable, Johnson 1999], [Johnson, Constable 1996] и [Таухе, Kent 2004].

	CP	QC	CJ	JC	TK
$E(g_1^0)$	-30.0	-30.0	-30.0	-30.0	-18.0
$E(g_2^0)$	-1.8	-1.2	-1.5	-1.5	0.0
σ_1^0	3.0	3.0	11.72	11.72	6.36
σ_1^1	3.0	3.0	1.67	1.67	1.67
σ_2^0	2.14	1.3	1.16	1.16	0.58
$\sigma(g_2^1)$	2.14	4.3	4.06	1.16	2.20
$\sigma(h_2^1)$	2.14	4.3	4.06	8.12	2.20
σ_2^2	2.14	1.3	1.16	1.16	0.58
α	27.7	27.7	15.0	15.0	7.5
β					3.8

Таблица 2: Параметры моделей CP, QC, CJ, JC и TK. Единицы измерения всюду μT , кроме безразмерного параметра β , задействованного в модели TK.

Большой Гауссовский процесс и поведение магнитного поля в выбранной географической точке

Для каждой точки q с координатами $(\mathfrak{R}, \Theta, \Psi)$, вектор поля в точке вычисляется из линейного по коэффициентам g_l^m и h_l^m соотношения:

$$\mathbf{B}(q) = \mathbf{B}(\mathfrak{R}, \Theta, \Psi) = -\mathbf{grad}V(\mathfrak{R}, \Theta, \Psi)$$

иными словами для каждой точки q имеется линейный оператор $A(q)$ отображающий \mathbf{k} в $\mathbf{B}(q)$:

$$\mathbf{B}(q) = A(q)\mathbf{k}$$

Поскольку в модели БГП распределение вектора \mathbf{k} (или его конечномерной аппроксимации) предполагается гауссовым, то из взаимной некоррелированности (см. однако выше замечание о Центральной Предельной Теореме) распределение трехмерного вектора поля $\mathbf{B}(q)$ также гауссово, которое определяется девятью вещественными параметрами: три отвечают среднему вектору $E(\mathbf{B})$, а остальные шесть соответствуют элементам симметричной 3×3 -матрицы ковариаций. $\text{Cov}(\mathbf{B}, \mathbf{B})$. С параметрами $\bar{\mathbf{k}} = E(\mathbf{k})$ и $\text{Cov}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$ связь определяется формулами:

$$E(\mathbf{B}(q)) = A(q)E(\mathbf{k}) = A(q)\bar{\mathbf{k}} \quad (4)$$

$$\text{Cov}(\mathbf{B}(q), \mathbf{B}(q)) = A(q)\text{Cov}(\mathbf{k}, \mathbf{k})A(q)^T \quad (5)$$

которые можно использовать при тестировании конкретной модели БГП посредством сравнения выборки случайных ее значений с выборкой реальных данных. Реализация этого подхода в применении к реальным данным содержит еще одну трудность, связанную с тем, что реальные данные как правило неполны и представляют лишь направления. Статистика направлений предполагает исследования свойств распределений на двумерной сфере методами непараметрической статистики, которые обычно не входят в стандартные учебники или справочники. Методика работы с данными по направлениям в предположении справедливости модели БГП будет предметом следующей публикации.

Построение генератора модельных данных

Напомним, что в любой точке $\{\mathfrak{R}, \Theta, \Psi\}$ имеется локальная система евклидовых координат, заданных направлениями North-East-Down, определяемыми как пара касательных к соответствующей сфере и направлением, противоположным радиус-вектору. Формула (1) указывает, как получить мгновенное значение потенциала поля в заданной географической точке. Небольшая модификация этой формулы дает представление евклидовых координат (в указанной системе координат) мгновенного значения вектора поля в заданной географической точке: действительно достаточно явно выписать градиент каждого слагаемого из формулы (1), сумма градиентов дает с обратным

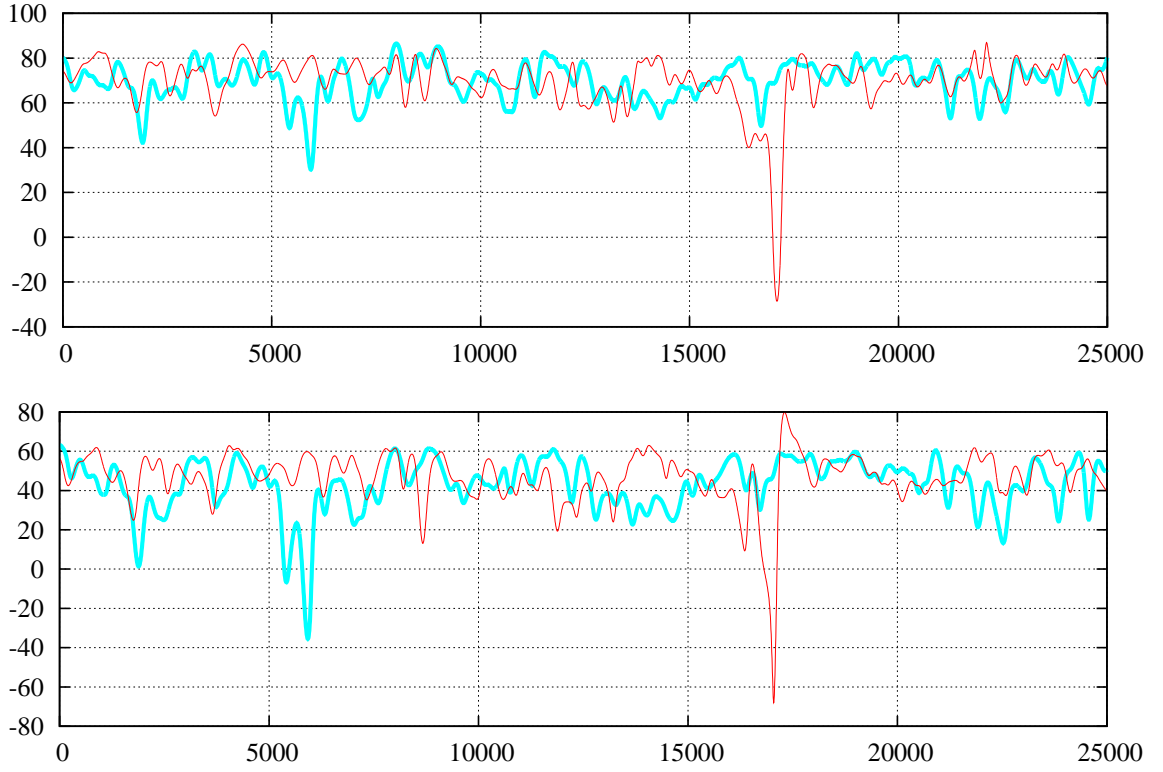


Рис. 2: Моделирование эволюции наклона (в градусах) за 25000 лет в моделях ТК (тонкая линия) и QC (жирная линия) для $30^\circ N$ (нижний график) и $60^\circ N$ (верхний график).

знаком вектор поля $\mathbf{B}(t) = -\nabla V(t)$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} B_N(t) \\ B_E(t) \\ B_D(t) \end{bmatrix} = & - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l g_l^m(t) \begin{bmatrix} (P_l^m)'(\cos \Theta) \cdot \cos m\Psi \sin \Theta \\ -mP_l^m(\cos \Theta) \cdot \sin m\Psi / \sin \Theta \\ (1+l)P_l^m(\cos \Theta) \cdot \cos m\Psi \end{bmatrix} \left(\frac{a}{\mathfrak{R}}\right)^{l+2} \\ & - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l h_l^m(t) \begin{bmatrix} (P_l^m)'(\cos \Theta) \cdot \sin m\Psi \sin \Theta \\ mP_l^m(\cos \Theta) \cdot \cos m\Psi / \sin \Theta \\ (1+l)P_l^m(\cos \Theta) \cdot \sin m\Psi \end{bmatrix} \left(\frac{a}{\mathfrak{R}}\right)^{l+2} \end{aligned} \quad (6)$$

Отсюда вытекает идея генерации *выборки* синтетических данных: для избранного конечномерного приближения используется столько независимых генераторов гауссовских случайных чисел, сколько рассматривается коэффициентов g_l^m, h_l^m (привычнее оперировать степенью разложения, в этом случае для модели степени n потребуется $(n+1)^2 - 1$ генератор, далее формула (1) даст выборку потенциалов и, наконец, формула 6, выражающая компоненты вектора градиента в данной точке q через коэффициенты g_l^m, h_l^m доставит окончательную выборку векторов поля. Эта достаточно простая процедура может быть несколько обобщена, с тем, чтобы построить последовательность векторов поля не обязательно разнесенных по времени на расстояние больше памяти БГП, иначе говоря, сгенерировать синтетические данные их с любым заданным временным шагом. Для этого достаточно выстроить значения во времени каждого из коэффициентов $g_l^m(t), h_l^m(t)$ с учетом соответствующих автокорреляционных функций. Этот шаг — построение значений во времени стационарного гауссова процесса с заданной автокорреляционной функцией — не столь уж очевиден и поэтому опишем его здесь подробнее.

Генератор случайного процесса с заданной автокорреляцией

Начнем с того, что напомним определение (авто)корреляционной функции $k_\xi(\tau) = K_\xi(t + \tau, t)$ стационарного (вообще говоря комплекснозначного) гауссовского процесса $\xi(t)$, где

$$K_\xi(t_1 + \Delta t, t_2 + \Delta t) = K_\xi(t_1, t_2) = \text{cov}(\xi(t_1), \xi(t_2)) = \mathbb{E}(\xi(t_1)\overline{\xi(t_2)})$$

Обратите внимание на расстановку комплексного сопряжения: для положительных τ более ранний момент времени берется с сопряжением, а для отрицательных τ – наоборот. В нашем случае рассматриваемый гауссовский процесс вещественнозначный и потому $k_\xi(\tau) = k_\xi(-\tau)$. Рассмотрим быстроубывающую (чтобы обеспечить существование всех необходимых интегралов по прямой) четную вещественнозначную функцию $R(t) = R(-t)$ и случайный процесс $\xi(t)$, определяемый интегралом по гауссовской случайной мере $\int_{-\infty}^{+\infty} R(t-s)dX(s)$, где $X(s)$ обозначает процесс броуновского движения. Для простоты, чтобы не вникать в детали свойств стохастического интеграла, можно рассматривать (дискретный аналог выражения со стохастическим интегралом) последовательность независимых стандартных гауссовских случайных величин α_n и $\xi(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} R(t-n)\alpha_n$. Корреляционная функция $k_\xi(\tau)$ процесса $\xi(t)$ явно вычисляется в терминах функции R , приведем здесь это вычисление (в дискретном случае):

$$E \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} R(n+\tau)\alpha_n \sum_{-\infty}^{+\infty} R(n)\alpha_n \right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} R(n+\tau)R(-n) = \sum_{-\infty}^{+\infty} R(\tau-m)R(m)$$

последнее выражение является дискретной сверткой, а в непрерывном варианте оно примет вид $\int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau-s)R(s)ds$. Таким образом, если известно представление заданной функции $k(\tau)$ в виде свертки $k(\tau) = R * R = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau-s)R(s)ds$, то используя указанную выше формулу для случайного процесса $\xi(t)$ получим $k(\tau) = k_\xi(\tau)$.

Для практического моделирования процесса $\xi(t)$ надо предъявить явно представление желаемой корреляционной функции в виде свертки $R * R$, и вычислить соответствующий стохастический интеграл или его оценку с некоторой точностью.

Пример

Хорошо известно явное выражение для свертки двух гауссиан:

$$e^{-t^2} * e^{-t^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(s-t)^2} e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-s^2/2}$$

таким образом решен вопрос о моделировании стационарного гауссовского процесса с корреляционной функцией $k(\tau) = e^{-\tau^2/2}$: в данном случае $R(t) = \sqrt[4]{2/\pi} e^{-t^2}$

В более общей ситуации поиск необходимого выражения для R может вестись исходя из формул Бореля, связывающих преобразование Фурье $F[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi i st} dt$ (эта версия интегрального преобразования Фурье соответствует традициям теории сигналов) с произведением и сверткой:

$$F[f(t)g(t)] = F[f(t)] * F[g(t)]; \quad F[f(t)]F[g(t)] = F[f(t) * g(t)]$$

Пример

Преобразование Фурье (см. например, [Abramovitz, Stegun 1964]) функции $2/(1+4\pi^2 t^2)$ дает $e^{-|s|}$, а преобразование Фурье функции $\sqrt{2}/(1+4\pi^2 t^2)$ дает $\sqrt{2}K_0(|s|)/\pi$, где $K_0()$ обозначает функцию Бесселя. Таким образом, выбирая $R(t) = \sqrt{2}K_0(|t|)/\pi$ получим, что соответствующий случайный процесс $\xi(t)$, определяемый (см. выше) интегралом по гауссовской случайной мере будет иметь экспоненциально убывающую корреляционную функцию.

Практическое моделирование данных.

В силу изложенного выше, достаточно сложное модельное поведение в пространстве и времени вектора магнитного поля $\mathbf{V}(\mathfrak{R}, \Theta, \Psi, t)$ может быть воспроизведено путем некоторого преобразования данных, полученных из достаточно стандартного и легкодоступного генератора случайных чисел. Статистические свойства таких модельных данных тем самым оказываются вычислительно проверяемыми, благо модельные данные в принципе не ограничены в количестве или в точности. При этом ряде случаев статистические свойства параметров можно и теоретически вывести из свойств БГП. Прямое сравнение модельных данных с реальными представляет отдельный интерес, но в первую очередь интересно проверить свойства некоторых широкоиспользуемых в палеомагнетизме параметров, рассчитанных на основе данных. Статистическое поведение таких

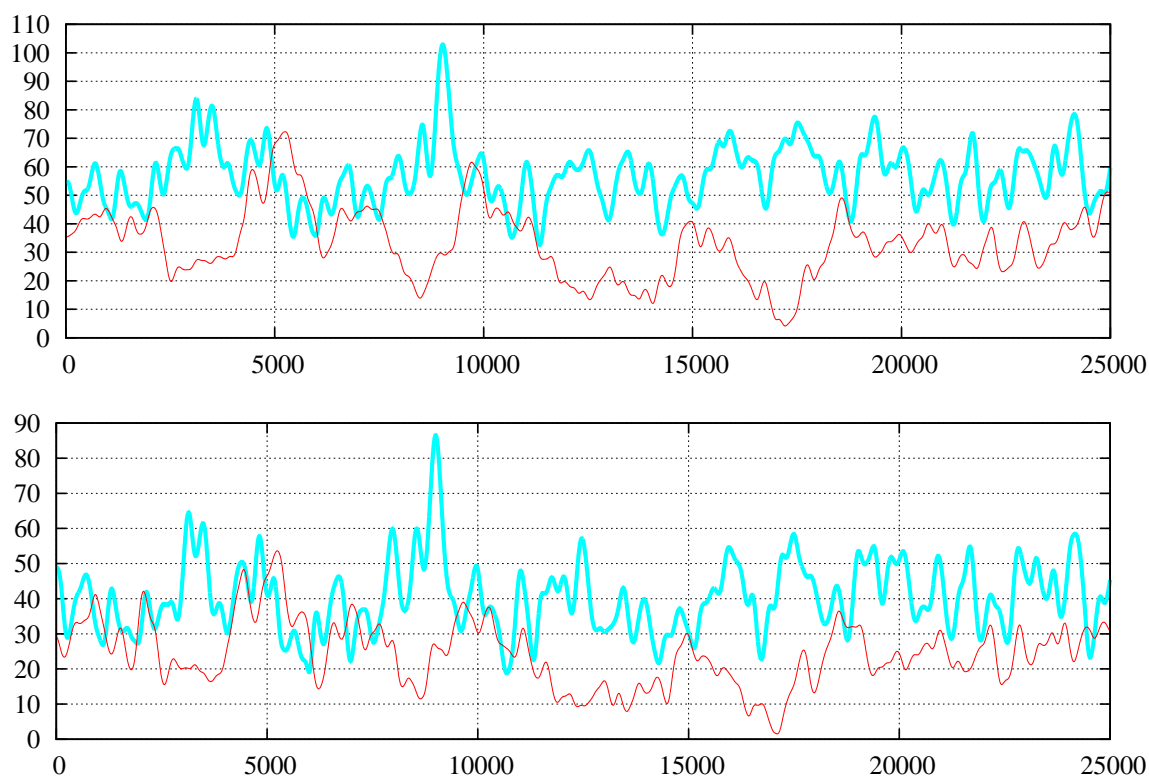


Рис. 3: Моделирование эволюции интенсивности (μT) за 25000 лет в моделях ТК (тонкая линия) и QC (жирная линия) для $30^\circ N$ (нижний график) и $60^\circ N$ (верхний график).

параметров (например: того же VGP) обычно достаточно непросто вывести аналитически даже для моделей, но зато несложно экспериментально вычислить, просто обработав достаточно большой набор синтетических данных. Далее сравнивая статистическое поведение двух параметров, рассчитанных из реальных и синтетических данных, можно будет судить о том, укладываются ли реальные данные в глобальную модель (ту, которую использовали для синтеза данных).

На сегодня распространенным и удобным инструментом для обработки данных является пакет MATLAB, с его помощью автором изготовлена программа для генерации реализаций Большого Гауссовского Процесса (при разных параметрах). Соответствующие тексты программ генерации выложены для свободного скачивания в сети Интернет на сайте <http://paleomag.ifz.ru>.

Для примера рассмотрим охватывающую 25 тысяч лет реализации БГП для моделей ТК и QC (см. соответственно [Tauxe, Kent 2004], [Quidelleur, Courtillot 1996]) с шагом разрешения по времени 5 лет и построим по этим двух реализаций картинки эволюции во времени наклона I (рис. 2) и интенсивности F (рис. 3) на разных широтах (показаны $30^\circ N$ и $60^\circ N$). Интересно, что несмотря на стационарный характер БГП, в рассматриваемых параметрах мы наблюдаем, например, экскурсии, которые традиционно принято соотносить с проявлениями нестационарности; видна также некоторая разница в поведении, определяемая несовпадением параметров этих моделей. Более подробный анализ подобных реализаций с целью оценки влияния параметров модели на привычные статистические параметры, отвечающие синтезированным данным, будет предметом следующих публикаций. Основной результат этой статьи состоит в явном предъявлении математической модели и ее программной реализации с целью дальнейшего статистически-корректного отбора параметров модели с использованием реальных данных.

Список литературы

[Abramovitz, Stegun 1964] Abramovitz M. Stegun I. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables, New York, (1964)

- [Bouligand, Hulot 2005] Bouligand, C., Hulot G. Statistical palaeomagnetic field modelling and symmetry considerations // *J. Int. Geoph.*, **161**, 591-602,(2005), doi:10.1111/j.1365-246X.2005.02612.
- [Bouligand и др. 2005] Bouligand, C., Hulot, G., Khokhlov, A., Glatzmaier, G.A. Statistical palaeomagnetic field modelling and dynamo numerical simulation // *J. Int. Geoph.*, **161**,603-626, (2005), doi:10.1111/j.1365-246X.2005.02613.
- [Constable, Johnson 1999] Johnson, C., and Constable, C. Anisotropic paleosecular variation models: implications for geomagnetic field observables // *Earth Planet. Sci. Lett.*, **115**, 35–51, (1999)
- [Constable,Parker 1988] Constable, C. G., and Parker, R. L. Statistics of the geomagnetic secular variation for the past 5 Myr // *J. Geophys. Res.*, **93**, 11569–11581, (1988)
- [Eckhardt 1984] Eckhardt, D.H. Correlations between global features of terrestrial fields // *Math. Geol.*, **16**, 155–171, (1984)
- [Hongre и др. 1998] Hongre, L., Hulot, G., Khokhlov, A. An analysis of the geomagnetic field over the past 2000 years // *Phys. Earth Planet. Int.*, **106**, 311–315, (1998)
- [Hulot, Le Mouél 1994] Hulot, G., Le Mouél, J-L. A statistical approach to the Earth’s main magnetic field // *Phys. Earth Planet. Int.*, **82**, 167–183, (1994)
- [Johnson, Constable 1995] Johnson, C., and Constable, C. The time-averaged field as recorded by lava flows over the past 5 Myr // *Geophys. J. Int.*, **122**, 489–519, (1995)
- [Johnson, Constable 1996] Johnson, C., and Constable, C. Paleosecular variation recorded by lava flows over the last 5 Myr // *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **354**, 89–141, (1996)
- [Johnson, Constable 1997] Johnson, C., and Constable, C. The Time-Averaged Geomagnetic Field: Global and Regional Biases for 0-5 Ma // *Geophys. J. Int.*, **131**, 643–666, (1997)
- [MagIC] Magnetics Information Consortium (MagIC) Promoting information technology infrastructures for the international paleomagnetic, geomagnetic and rock magnetic community // <http://earthref.org/cgi-bin/magic-s0-main.cgi>
- [Mauersberger 1956] Mauersberger D. Das Mittel der Energiedichte des Geomagnetischen Hauptfeldes an der Erdoberfläche und seine Säkulare Änderung, // *Gerlands Beitr. Geophys.*, **65** , 207-215 , (1956)
- [Merrill и др 1996] Merrill, R., McElhinny, M., McFadden, P. The magnetic field of the Earth, *Academic Press*, London (1996)
- [Numerical Recipes] Press C., Teukolsky S., Vetterling W., Flannery B. : Numerical Recipes in C. Second edition, Cambridge (2004)
- [Quidelleur, Courtillot 1996] Quidelleur, X., and Courtillot, V. On low-degree spherical harmonic models of paleosecular variation // *Phys. Earth Planet. Int.*, **95**, 55–77, (1996)
- [Numerical Recipes] Press C., Teukolsky S., Vetterling W., Flannery B. Numerical Recipes in C. Second edition, Cambridge (1996), see also http://www.ulib.org/webRoot/Books/Numerical_Recipes/bookc.html.
- [Swanson-Hysell и др. 2009] Swanson-Hysell N.L, Maloof A.C., Weiss B.P., Evans D.A. No asymmetry in geomagnetic reversals recorded by 1.1-billion-year-old Keweenawan basalts, // *Nature Geosci.*, **2**, 713–717, (2009)
- [Tauxe, Kent 2004] Tauxe, L., Kent, D. V. A simplified statistical model for the the geomagnetic field and the detection of shallow bias in paleomagnetic inclinations: was the ancient magnetic field dipolar? // *Timescales of the Paleomagnetic field*, eds Channell J. E. T., Kent D. V., Lowrie W., Meert J., *Am. Geophys. Un. Monogr.*, **145**, 101–115, (2004)