

Глава 2. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕКТОРОВ НА СФЕРЕ

Распределение Фишера.....	1
Вычислительные аспекты.....	2
Равномерное распределение.....	3
Другие распределения векторов на сфере.....	3
Реальные распределения.....	4
Литература.....	5

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ФИШЕРА

При анализе совокупностей векторов намагниченности принято использовать осесимметричное распределение Фишера [Fisher, 1953]. Ниже приведены три формулы для плотности распределения Фишера.

$$f(\varphi, \psi) = C(\kappa) \exp(\kappa \cos \varphi) = [\kappa / (4\pi \sinh \kappa)] \exp(\kappa \cos \varphi). \quad (2.1)$$

$C(\kappa) = \kappa / (4\pi \sinh \kappa)$ – нормировочный множитель, учитывающий, что интеграл от плотности по всей поверхности сферы равен единице. Здесь φ – радиальный угол, или угловое расстояние от центра распределения, ψ – азимутальный угол. Пределы изменения: φ – от 0 до π , ψ – от 0 до 2π . \sinh – гиперболический синус ($\sinh(\kappa) = [(\exp(\kappa) - \exp(-\kappa))] / 2$).

Отметим, что азимутальный угол, распределение которого *равномерно на круге*, не присутствует в этой формуле. Вообще говоря, плотности равномерных распределений на сфере (и на круге), в отличие от других хорошо известных распределений, как одномерных, так и распределений на сфере, – уникальны; они не имеют параметров (например, в отличие от равномерного распределения на отрезке). Плотность равномерного распределения на круге выражается формулой $f_\psi = 1/2\pi$. Вот этим коэффициентом, скрытым в нормирующем множителе $C(\kappa)$, зависящем только от кучности, и входит азимутальный угол в формулу для плотности фишеровского распределения. Чтобы как-то выразить этот факт, иногда для плотности распределения Фишера пишут:

$$f(\varphi, \psi) = f_\varphi(\varphi) f_\psi(\psi).$$

В формуле (2.1) не присутствуют в явном виде координаты центра распределения, а только косинус углового расстояния от центра. Координаты центра распределения можно выразить в декартовых или сферических координатах (используя формулы сферической тригонометрии [Бронштейн, Семендяев, 1986]), и тогда получаются две следующие формулы [Mardia, 1972]:

$$f(x, y, z) = C(\kappa) \exp[\kappa(x x_0 + y y_0 + z z_0)] \quad (2.2)$$

$$f(D, I) = C(\kappa) \exp\{\kappa[\sin I \sin I_0 + \cos I \cos I_0 \cos(D - D_0)]\}. \quad (2.3)$$

Здесь (x_0, y_0, z_0) и (D_0, I_0) – декартовы и сферические координаты центра распределения, соответственно. В формуле (2.2) незримо присутствует условие единичности длин векторов (1.1).

В формулах плотности (2.1 – 2.3) греческой буквой κ обозначена кучность распределения Фишера, характеризующая степень концентрации векторов относительно центра распределения.

Если проинтегрировать плотность распределения Фишера (2.1) по φ , учитывая при этом, что элемент площади в сферических координатах выражается в виде $\sin \varphi \, d\varphi \, d\psi$, то для азимутального угла получается равномерное распределение на круге. Наоборот, если проинтегрировать по ψ , то для плотности радиального угла получают

$$f(\varphi) = C_1(\kappa) \exp(\kappa \cos \varphi) \sin \varphi \quad (2.4)$$

Соответствующие *интегральные функции распределения* (или просто функции распределения):

$$F(\psi) = \psi / 2\pi \quad (2.5)$$

$$F(\varphi) = [\exp \kappa - \exp(\kappa \cos \varphi)] / [\exp \kappa - \exp(-\kappa)] \quad (2.6)$$

Функции распределения определяют вероятность того, что величина, например, φ будет меньше заданного значения, и, соответственно, $F(\varphi = 0) = 0$ и $F(\varphi = \pi) = 1$. На рис. 2.1 представлены функции распределения (2.5) и (2.6).

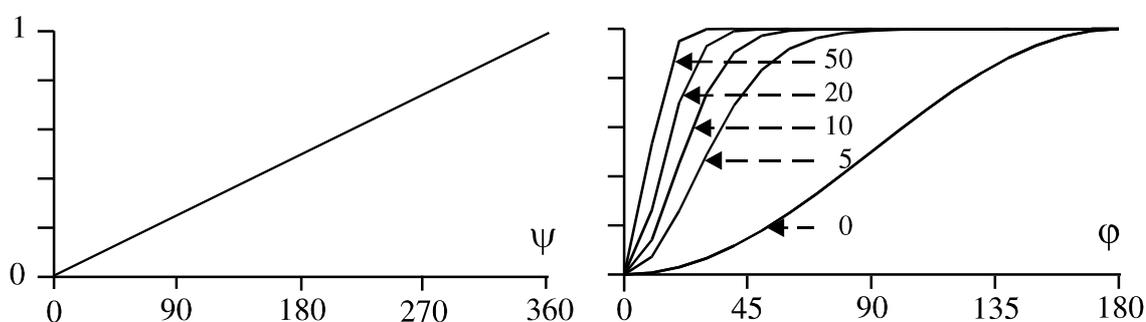


Рис. 2.1. Функции распределения азимутальной (ψ) и радиальной (φ) составляющих распределения Фишера (параметр кривых – кучность распределения векторов)

Продифференцировав, например, (2.6), получим формулу (2.4).

В отличие от распределения отношения дисперсий, также называемое "распределением Фишера" или "F-распределением", в дальнейшем будем обозначать распределение Фишера для векторов на сфере $\Phi[D, I, \kappa]$. Распределение Фишера обладает осевой симметрией относительно его генерального среднего направления. Плотность распределения векторов в зависимости от углового расстояния от генерального среднего направления уменьшается в соответствии с экспонентой $\exp(\kappa \cos(\varphi))$. Чем больше кучность распределения, тем большая концентрация векторов наблюдается вокруг среднего направления. В случае $\kappa = \infty$ распределение Фишера переходит в точечное распределение [Fisher, Lewis, Embleton, 1987] – все векторы в точности совпадают с центром распределения; при $\kappa = 0$ распределение Фишера трансформируется в равномерное распределение на сфере.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ

Вычисляя функцию распределения по формуле (2.6) для больших значений кучности, при вычислении экспоненты будут получаться очень большие числа, которые обычно не могут быть размещены в отводимой компьютером памяти (произойдет так называемое переполнение порядка). Поэтому для компьютерных вычислений эта формула должна быть преобразована, например, делением на $\exp(\kappa)$ к такому виду [Шипунов, 1993; 2000]:

$$F(\varphi) = \{1 - \exp[-\kappa (1 - \cos \varphi)]\} / [1 - \exp(-2\kappa)] \quad (2.7)$$

Например, для того, чтобы определить область, в которой заключено 95% точек для выборки из распределения Фишера с кучностью 30, выражение (2.7) приравнивается 0.95 и получают величину критического угла 26° . Аналогичным образом эта формула используется для определения радиуса доверительного круга для среднего направления фише-ровской выборки.

РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

На сфере известно также равномерное распределение, которое суть распределение Фишера с нулевой кучностью. Можно показать, что для равномерного распределения функция распределения радиального угла выражается формулой [Шипунов, 1994; 2000; Шипунов, Муравьев, 1997]

$$\begin{aligned} f(\varphi, \psi) &= 1/4\pi, \\ f(\varphi, \kappa = 0) &= (1 - \cos \varphi)/2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Последняя формула соответствует графику на рис. 2.1 для нулевой кучности.

Иногда полезно использовать усеченное распределение для векторов на сфере, область определения которого ограничена кругом радиуса φ_0 . Плотность этого распределения [Шипунов, 2000]

$$f(\varphi, \psi) = 1/[2\pi(1 - \cos \varphi_0)] \quad (2.9)$$

а плотность и функция распределения радиального угла (две следующие формулы, соответственно):

$$f(\varphi) = \sin \varphi / (1 - \cos \varphi_0) \quad (2.10)$$

$$f(\varphi) = (1 - \cos \varphi) / (1 - \cos \varphi_0) \quad (2.11)$$

Можно показать, что равномерное распределение на сфере (2.8) является частным случаем рассматриваемого распределения (при φ_0 стремящемся к π).

ДРУГИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕКТОРОВ НА СФЕРЕ

Известны более сложные распределения на сфере. Область применения их в «практической» палеомагнитологии ограничена, поэтому отметим лишь, что основной характеристикой в этом случае является так называемая *матрица рассеяния* \mathbf{T} , которая определяет три *собственных числа* (τ_1, τ_2, τ_3) и соответствующие, взаимно ортогональные, *собственные векторы* (T_1, T_2, T_3). Матрица рассеяния для выборки векторов, представленных декартовыми координатами, выражается следующим образом:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sum x^2 & \sum xy & \sum xz \\ \sum xy & \sum y^2 & \sum yz \\ \sum xz & \sum yz & \sum z^2 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Сумма связанных с матрицей рассеяния \mathbf{T} трех собственных значений ($\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$) $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = N$, где N – объем выборки векторов. А три собственных вектора, являющихся главными осями, представляют собой линейнонезависимые векторы – они некоррелированы между собой. Собственные числа равны сумме квадратов евклидовых расстояний

относительно начала координат проекций исходных точек на соответствующий собственный вектор (т.е. дисперсии относительно начала координат).

Собственный вектор, соответствующий максимальному собственному значению, определяет направление, рассеяние вдоль которого для исходных данных максимально. Например, для распределения типа фишеровского, T_{\max} приблизительно совпадает со средним направлением для выборки векторов, а для распределения векторов, представляющего две полярности намагниченности, – с направлением среднего вектора после предварительного приведения векторов к одной полярности. Соответственно T_{\min} определяет направление, рассеяние вдоль которого минимально. Для выборки векторов, например, представляющей «полосовое» распределение, L_{\min} является направлением нормали к большому кругу, аппроксимирующему исходные данные.

Иногда используют нормализованные (приведенные) собственные значения $\lambda_i = \tau_i/N$. Тогда $\sum \lambda = 1$.

Относительные величины собственных чисел λ используют для классификации формы распределений [Девис, 1990] Возможны следующие частные случаи.

- 1) $\lambda_1 \approx \lambda_2 \approx \lambda_3 \approx 1/3$: равномерное распределение.
- 2) $\lambda_1 \approx \lambda_2 < \lambda_3$: распределение фишеровского типа (одно- или двухполярное).
- 3) $\lambda_1 \ll \lambda_2 < \lambda_3$: полосовое распределение.
- 4) $\lambda_1 \ll \lambda_2 \approx \lambda_3$: полосовое распределение (более вытянутое, чем предыдущее).
- 5) $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \approx \lambda_3$: большой круг.
- 6) $0 = \lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3 = 1$ точечное распределение (все вектора в точности совпадают с собственным вектором соответствующим λ_3).

РЕАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В работе [Шипунов, 1993]) было показано, что распределение Фишера в настоящее время полностью удовлетворяет практическим нуждам палеомагнитологов при описании совокупностей векторов с осевой симметрией.

При палеомагнитных исследованиях можно рассматривать, например, следующие распределения векторов [Шипунов, Алексютин, Левашова, 1996]:

1. магнитные моменты ферромагнитных частиц в одном палеомагнитном образце;
2. векторы намагниченности на внутрислоевом уровне;
3. векторы намагниченности на межслоевом уровне, дисперсия которых определяется в том числе вековыми вариациями геомагнитного поля;
4. палеомагнитные полюсы.

Каждое из перечисленных выше распределений можно априорно считать фишеровским [Fisher, 1953]. И, в зависимости от этого, остальные распределения будут, строго говоря, отличаться от распределения Фишера. Это отличие, однако, при больших значениях кучности не слишком велико и далеко не всегда может быть обнаружено практически. Поэтому реальные распределения векторов однокомпонентной намагниченности на межслоевом уровне также можно полагать соответствующими распределению Фишера.

Осреднение магнитных моментов в каждом отдельном образце производит за нас природа. Можно даже утверждать, что палеомагнитолог, как правило, не знает, каково это распределение. Обычно только три последних распределения могут быть подвергнуты палеомагнитному анализу.

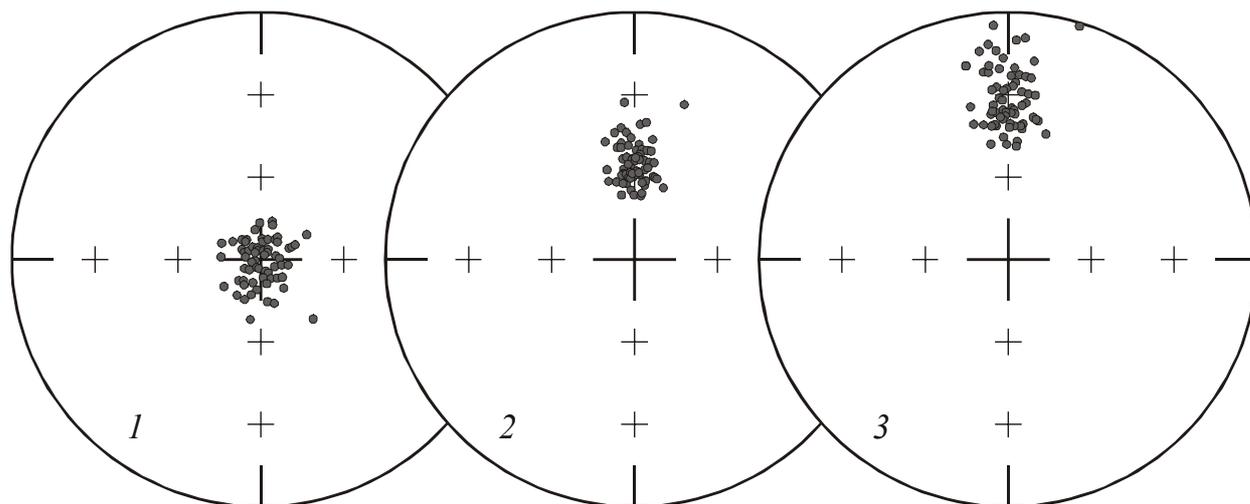


Рис. 2.2. Распределение виртуальных геомагнитных полюсов, определенных по археомагнитным данным (1), и пересчет этого распределения в направления геомагнитного поля для широты 40, 20° (2 и 3 соответственно)

Если фишеровским является распределение виртуальных геомагнитных полюсов, то в силу известной формулы $\text{tg}(I) = 2 \cdot \text{tg}(\varphi)$, связывающей наклонение геомагнитного поля и широту места, распределение векторов на межпластовом уровне не будет являться фишеровским. Более того, из-за нелинейности зависимости наклонения поля от широты оценка среднего направления векторов намагниченности будет смещена (наклонение намагниченности будет заниженным). Вычисление координат палеомагнитного полюса по среднему направлению намагниченности приведет к оценке, отличной от положения палеомагнитного полюса, полученного осреднением виртуальных геомагнитных полюсов, т.е. соответствующего гипотезе центрального осевого диполя. Такая систематическая ошибка в определении палеошироты невелика, она не превышает первых градусов и определяется кучностью распределения виртуальных геомагнитных полюсов. Однако, строго говоря, в этом случае правильнее осреднять не векторы намагниченности для различных стратиграфических уровней, а соответствующие им координаты виртуальных геомагнитных полюсов, так как именно они распределены в соответствии с законом Фишера.

На рис. 2.2 представлены распределения виртуальных геомагнитных полюсов за последние 3000 лет, полученные по археомагнитным данным [Бурлацкая, 1987], и соответствующие им распределения векторов намагниченности для разных широт. Визуальный анализ полученных распределений, а также использование статистических критериев согласия [Баженов, Рябушкин, 1978], свидетельствуют о том, что распределение виртуальных геомагнитных полюсов хорошо согласуется с распределением Фишера, тогда как форма распределений векторов намагниченности трансформирована. Распределения палеомагнитных векторов вытянуты и не соответствуют распределению Фишера.

ЛИТЕРАТУРА

В данной главе использованы следующие работы автора:

- Шипунов С.В. (1993) Основы палеомагнитного анализа: Теория и практика. М.: Наука. 1993. 159 с. (Труды ГИН. Вып. 487)
- Шипунов С.В. (1994) Тест галек в палеомагнетизме // Физика Земли. 1994. № 2. С. 25-32.
- Шипунов С.В. (2000) Статистика палеомагнитных данных. М.: Геос. 2000. 80 с. (Труды ГИН РАН. Вып. 527.)

- Шипунов С.В., Алексютин М.В., Левашова Н.М. (1996) Вопросы палеомагнитного анализа. М.: Геологический институт РАН. 1996. 62 с. (Труды ГИН РАН. Вып. 504)
- Шипунов С.В., Муравьев А.А. (1997) Критерии равномерности для сферических данных в палеомагнетизме // Физика Земли. 1997. № 12. С. 71-82.

Использованная литература:

- Баженов М.Л., Рябушкин П.К. (1978) Применение статистических критериев согласия в палеомагнитных исследованиях // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1978. № 7. С. 100-104.
- Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. (1986) Справочник по математике. М.: Наука, 1986. 544 с.
- Бурлацкая С.П. (1987) Археомагнетизм: Изучение древнего геомагнитного поля. М.: ИФЗ АН СССР. 1987. 248 с.
- Девис Дж. (1990) Статистический анализ данных в геологии. М.: Недра. 1990. Кн. 1. 320 с. Кн. 2. 428 с.
- Fisher R.A. (1953) Dispersion on a sphere // Proc. R. Soc. London. 1953. A 217. P. 295-305.
- Fisher N.I., Lewis T., Embleton B.J.J. (1987) Statistical analysis of spherical data. Cambridge: Cambridge University Press. 1987. 330 p.
- Mardia K.V. (1972) Statistics of directional data. London: Academic Press. 1972. 357 p.