ГЕОМАГНЕТИЗМ И АЭРОНОМИЯ, 2008, том 48, № 2, с. 1–8

УДК 550.383

НЕКОТОРЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЦИКЛОНИЧЕСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ЖИДКОМ ЯДРЕ ЗЕМЛИ

© 2008 г. М. Ю. Решетняк

Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, Москва e-mail: reshetnyak@ifz.ru

Поступила в редакцию 14.06.2007 г.
После доработки 14.06.2007 г.

Быстрое суточное вращение планет приводит к появлению циклонической тепловой турбулентности в жидких ядрах, являющейся источником генерации наблюдаемых магнитных полей. В работе рассмотрена модель, позволяющая воспроизводить характерные черты мелкомасштабных геострофических течений в физическом и волновом пространствах. Приведены оценки потоков энергий и гидродинамической спиральности как функции волнового числа. Показано совместное существование прямых и обратных каскадов. Рассмотрены следствия для земного ядра и задач геодинамо.

PACS: 91.10.By, 91.35.Cb

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время существует достаточно оснований считать, что среда жидкого ядра Земли и других планет является хорошо перемешанной в силу интенсивной конвекции [Braginsky and Roberts, 1995]. Оценка числа Рейнольдца дает Re ~ 10^9, см. подробней [Решетняк, 2006]. Оценка числа Рэлея для тепловой конвекции соответствует также высокой степени надкритичности тепловой конвекции Ra ~ 10^3Ra^{cr} [Jones, 2000], где Ra^{cr} – критическое значение, при котором начинается конвекция. Оба приведенных факта свидетельствуют о существовании турбулентности в жидких ядрах планет. В силу быстрого вращения свойства турбулентности могут существенно отличаться от привычной колмогоровской турбулентности (случай совместного влияния быстрого вращения и сильного магнитного поля рассмотрен в работе [Braginsky and Meytlis, 1991]). Существование выделенного направления, связанного с осью вращения планет, приводит к возникновению геострофического баланса: состояния, когда поля оставаясь трехмерными, перестают зависеть от координаты вдоль направления оси вращения [Pedlosky, 1987]. В каком-то смысле геострофические течения занимают промежуточное положение между двумерными и трехмерными течениями. Поскольку свойства двумерной турбулентности существенно отличаются от свойств трехмерной турбулентности, например, наличием разных законов сохранения [Rose and Sulem, 1978; Kraichnan, 1980], то изучение геострофических режимов является крайне интересным направлением исследований. Представляется также важным изучение обратных каскадов энергии, хорошо известных в двумерной и геострофической турбулентностях [Hossain, 1994; Smith and Waleffe, 1999].

Ниже мы рассмотрим модель тепловой конвекции в прямоугольном ящике, позволяющую воспроизводить циклоническую турбулентность и остановимся на свойствах потоков интегралов движения (энергии и гидродинамической спиральности) в волновом пространстве. Рассматриваемая модель близка по свойствам к геострофической турбулентности в жидких ядрах планет. Понимание механизмов потоков этих величн интересно как с чисто теоретической точки зрения, так и может быть использовано для создания полуэмпирических моделей турбулентности.

2. УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ

Рассмотрим тепловую конвекцию несжимаемой жидкости $\nabla\cdot\mathbf{V}=0$ во вращающемся с угловой скоростью Ω относительно вертикальной оси $\mathbf{z}$ прямоугольном ящике. Введя следующие единицы измерения для скорости $\mathbf{V}$, времени t, и давления P: κ/L, L^2/κ и $\rho\kappa^2/L^2$, где L – единица длины, κ – коэффициент молекулярной теплопроводности, ρ – плотность вещества, запишем систему уравнений динамо в Декартовой системе координат (x, y, z) в виде (см. для сферической геометрии [Jones, 2000]):

$$\begin{gathered} E\mathrm{Pr}^{-1}\left[\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}-\mathbf{V}\times(\nabla\times\mathbf{V})\right]= \\ =-\nabla P-\mathbf{1z}\times\mathbf{V}+\mathrm{Ra}\,T\mathbf{1z}+E\Delta\mathbf{V} \\ \frac{\partial T}{\partial t}+(\mathbf{V}\cdot\nabla)(T+T_0)=\Delta T. \end{gathered}\qquad(1)$$

Безразмерные числа Прандтля, Экмана, Рэлея и Робертса вводятся как: $\mathrm{Pr}=\dfrac{\nu}{\kappa}$, $E=\dfrac{\nu}{2\Omega L^2}$, и Ra =

$= \dfrac{\alpha g_0 \delta TL}{2\Omega\kappa}$, где ν – коэффициент кинематической вязкости, α – коэффициент объемного расширения, g_0 – ускорение свободного падения, δT – единица возмущения температуры T относительно "диффузионного" распределения температуры $T_0 = 1 - z$, η – коэффициент магнитной диффузии. Число Россби введем как $\mathrm{Ro} = E\mathrm{Pr}^{-1}$.

Для границ $z = 0, 1$ принимаем нулевые возмущения температуры $T = 0$, что с учетом выбранного профиля T_0, эквивалентно заданию температур на границах: $\tilde{T} = T + T_0 = 1, 0$ (подогрев снизу). Для поля скорости принимаем условие непроникновения и равенство нулю градиентов тангенциальных компонент на $z = 0, 1$: $V_z = \dfrac{\partial V_x}{\partial z} = \dfrac{\partial V_y}{\partial z} = 0$. Такая постановка граничных условий гарантирует равенство нулю тангенциальных компонент тензора вязких напряжений, а также нулевые значения гидродинамической спиральности.

Поскольку для нас далее будет важным исследование каскадных свойств турбулентности, мы оставим нелинейный член в уравнении Навье-Стокса, которым часто пренебрегают при рассмотрении полной задачи геодинамо [Jones and Roberts, 2000].

3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

В силу наличия диссипации и соответственно, необратимости процессов, рассматриваемых в турбулентности, турбулентность не является в строгом смысле равновесной системой [Rose and Sulem, 1978; Kraichnan, 1980]. Тем не менее, часто в теории турбулентности рассматривают статистически равновесные состояния, когда среднее по времени от функции распределения вероятности системы не зависит от времени. Однако даже в этом случае, система являясь стационарной в физическом пространстве, может быть неравновесной в волновом пространстве. Последнее связано с тем, что масштабы, на которых осуществляются ввод и отбор энергии, могут быть разнесены в волновом пространстве. Так, в колмогоровской турбулентности энергия вводится на большом масштабе, а диссипация происходит на малых масштабах. Следовательно, может существовать направленный поток энергии (или другой величины) в волновом пространстве. В терминах разложения Фурье данное явление связано с взаимодействием разных гармоник, т.е. каскадным процессом. Потоки величин от больших масштабов к малым называют прямым каскадом, и наоборот – обратным. В волновом пространстве для скорости изменения энергии E гармоник на волновом векторе $k = |\mathbf{k}|$ имеем:

$$\frac{\partial E(k)}{\partial t} = \mathcal{T}(k) + F(k) + D(k), \quad (2)$$

где $k = |\mathbf{k}|$, $\mathcal{T}(k)$ – поток энергии от гармоник с другими k, $F(k)$ – работа внешних сил, $D(k)$ – диссипация.

Для изучения нелинейной системы, вообще говоря, важно рассмотрение всех нелинейных величин. Однако в силу большого числа нелинейных членов, обычно ограничиваются рассмотрением ряда инвариантов, имеющих простую физическую интерпретацию. Для уравнения Навье-Стокса, в первую очередь, это кинетическая энергия $E_K = \mathbf{V}^2/2$. Далее, в зависимости от размерности рассматриваемого пространства, рассматривают энстрофию $\Omega = \omega^2$ для двумерия ($\omega = \nabla \times \mathbf{V}$ – завихренность поля скорости) и гидродинамическую спиральность $\mathcal{H}^{\mathcal{H}} = \mathbf{V} \cdot \omega$ – для трехмерия. Интерес к гидродинамической спиральности также вызван тесной связью $\mathcal{H}^{\mathcal{H}}$ с α-эффектом, связанным с генерацией среднего магнитного поля турбулентностью в теории динамо [Krause and Rädler, 1980]. Ниже мы рассмотрим уравнения для E_K и $\mathcal{H}^{\mathcal{H}}$ более подробно.

Уравнение кинетической энергии получается умножением уравнения Навье-Стокса скалярно на $\mathbf{V}$. Применяя осреднение по объему и учитывая периодичность решения, имеем:

$$2^{-1}E\mathrm{Pr}^{-1}\left[\frac{\partial\langle\mathbf{V}\rangle^2}{\partial t} + \langle(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}^2\rangle\right] = \\ = \mathrm{Ra}\langle TV_z\rangle - E\langle(\nabla\omega)^2\rangle, \quad (3)$$

где

$$\langle f(\mathbf{r})\rangle = \mathcal{V}^{-1}\int_{\mathcal{V}} f(\mathbf{r})d\mathbf{r}^3 \quad (4)$$

означает осреднение поля f по объему $\mathcal{V}$. В силу дивергентности второго члена в левой части уравнения (4) для периодических граничных условий он равен нулю. Однако как уже отмечалось выше, энергия может перераспределяться между масштабами. Для оценки перераспределения энергии в волновом пространстве мы представим поля в виде суммы низкочастотной и высокочастоной компонент $f(\mathbf{r}) = f^<(\mathbf{r}) + f^>(\mathbf{r})$ [Обухов, 1941], где

$$f^<(\mathbf{r}) = \sum_{|k| \le K}\hat{f}_k e^{i\mathbf{kr}}, \quad f^>(\mathbf{r}) = \sum_{|k| > K}\hat{f}_k e^{i\mathbf{kr}}, \quad (5)$$

соответственно. Для периодических полей f и g имеем (см. подробнее [Frisch, 1995]):

$$\left\langle\frac{\partial f}{\partial x}\right\rangle = 0, \quad \left\langle g\frac{\partial f}{\partial x}\right\rangle = -\left\langle f\frac{\partial g}{\partial x}\right\rangle, \quad \langle f^> g^<\rangle = 0. \quad (6)$$

Так же удобно ввести оператор P_K, проецирующий поле на его подмножество: $f(\mathbf{r}) \longrightarrow f^<(\mathbf{r})$, $P_K^2 = P_K$. Тогда для ответа на вопрос о том, как изменилась кинетическая энергия для подсистемы $E_K^< = (V^<)^2/2$ следует записать уравнение для $E_K^<$. Последнее можно сделать, применив к уравнению Навье-Стокса оператор P_K, и далее, умножив на $\mathbf{V}^<$. После ряда преобразований имеем:

$$2^{-1}E\mathrm{Pr}^{-1}\left[\frac{\partial\langle V_i^< V_i^<\rangle}{\partial t} + \langle V_i^< \cdot (V_j \cdot \nabla_j)V_i^>\rangle\right] = \\ = \mathrm{Ra}\langle T^< V_z^<\rangle - E\langle(\nabla\omega^<)^2\rangle. \quad (7)$$

Второй член $\Pi(K)$ (интегральный поток) в левой части (7) равен энергии, переданной высокочастотной части системы. Величины Π и $\mathcal{T}$ (локальный поток) связаны соотношением [Frisch, 1995]:

$$\mathcal{T}(k) = -\frac{\partial\Pi}{\partial k}, \quad \int_{k=0}^{\infty}\mathcal{T}(k)dk = 0. \quad (8)$$

Аналогично имеем для квадрата флуктуации температуры:

$$2^{-1}\frac{\partial\langle(T^<)^2\rangle}{\partial t} = \\ = -\langle T^< V_j \cdot \nabla_j T^>\rangle + \langle T^< V_z^<\rangle - \langle(\nabla T^<)^2\rangle. \quad (9)$$

Здесь поток в волновом пространстве соответствует первому члену в правой части (9). Второй член является источником энергии и также учитывает нелинейные взаимодействия.

Для вывода уравнения спиральности $\mathcal{H}^{\mathcal{H}}$ умножим уравнения Навье-Стокса скалярно на ω. Далее применим оператор rot к уравнению движения, умножим скалярно на $\mathbf{V}$ и сложим с первым уравнением:

$$E\mathrm{Pr}^{-1}\left[\frac{\partial\mathcal{H}^{\mathcal{H}}}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathcal{H}^{\mathcal{H}}\right] = -\nabla\cdot\left[\left(P - \frac{1}{2}\mathbf{V}\right)\omega\right] + \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{V}^2 + [\omega\times\mathbf{V}]_z + \mathrm{Ra}[\nabla\times(T\mathbf{V})]_z - 2E\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\frac{\partial\omega_i}{\partial x_j}. \quad (10)$$

Обратим внимание, что скорость изменения спиральности зависит от векторного произведения скорости и завихренности, т.е. если предположить, что произведение $|\mathbf{V}||\omega|$ не завит от времени, то возможно появление колебаний спиральности во времени за счет изменения угла между векторами $\beta = \widehat{V,\omega}$:

$$\dot\beta = -\cos\gamma, \quad \gamma = \widehat{\mathbf{p},\mathbf{z}}, \quad \mathbf{p} = \omega\times\mathbf{V}. \quad (11)$$

Условие реализации крупномасштабной спиральности сводится к неравному нулю среднему по времени: $\langle\ldots\rangle_t \neq 0$, т.е. $\gamma = \pi/2$. Последнего легко добиться, потребовав $\omega_z \gg \omega_x$, ω_y, что реализуется в циклонической турбулентности.

Возвращаясь к выводу осредненного уравнения для спиральности $\mathcal{H}^{\mathcal{H}^<} = \mathbf{V}^< \cdot \omega^<$ имеем:

$$E\mathrm{Pr}^{-1}\left\langle\frac{\partial\mathcal{H}^{\mathcal{H}}}{\partial t}\right\rangle = \Pi + \langle[(\nabla\times\mathbf{V}^<)\times\mathbf{V}^<]_z\rangle - \\ - 2E\left\langle\frac{\partial V_i^<}{\partial x_j}\frac{\partial\omega_i^<}{\partial x_j}\right\rangle, \quad (12)$$

где интегральный поток спиральности $\mathcal{H}^{\mathcal{H}^<}$ в волновом пространстве имеет вид:

$$\Pi = \langle\omega_i^< V_j\nabla_j V_i^>\rangle + \langle V_i^< V_j\nabla_j\omega_i^>\rangle - \langle V_i^<\omega_i^<\nabla_j V_i^>\rangle. \quad (13)$$

4. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Для численного решения системы уравнений (1) использовался псевдо-спектральный метод (см. [Orszag, 1971; Canuto et al., 1988; Cattaneo et al., 2003], а также [Решетняк, 2007], где рассмотрены методы параллелизации). Далее мы лишь кратко остановимся на представлении основных уравнений в волновом пространстве.

4.1. Псевдо-спектральный метод

В волновом пространстве система уравнений (1) может быть записана в виде [Buffett, 2003]:

$$E\left[\mathrm{Pr}^{-1}\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + k^2\mathbf{V}\right]_{\mathbf{k}} = \mathbf{k}\mathcal{P}_{\mathbf{k}} + \mathbf{F}_{\mathbf{k}} \\ \left[\frac{\partial T}{\partial t} + k^2 T\right]_{\mathbf{k}} = -[(\mathbf{V}\cdot\nabla)(T + T_0)]_{\mathbf{k}}, \quad (14)$$

где

$$\mathcal{P}_{\mathbf{k}} = -\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{F}_{\mathbf{k}}}{k^2}, \quad k^2 = k_\beta k_\beta, \quad \beta = 1\ldots3, \\ \mathbf{F}_{\mathbf{k}} = [E\mathrm{Pr}^{-1}\mathbf{V}\times(\nabla\times\mathbf{V}) + \mathrm{Ra}T - \mathbf{1z}\times\mathbf{V}]_{\mathbf{k}}, \quad (15)$$

а T и $\mathbf{V}$ – трехмерные образы Фурье исходных физических полей, $\mathbf{k}$ – волновой вектор.

Практически численное решение сводится к интегрированию уравнений (14–15) по времени по схеме 2-го порядка Адамса-Башфора для всех членов кроме диффузионного. Для вычисления же диссипативных членов использован известный "аналитический" прием [Canuto et al., 1988; Cattaneo et al., 2003]. При вычислении нелинейных членов осуществляется переход в физическое пространство с помощью быстрого преобразования Фурье, где поля и их производные перемножаются и далее, используя обратное преобразование Фурье, делается переход в исходное волновое пространство.

Пусть в физическом пространстве поле f задано на сетке $G = (1...N_x, 1...N_y, 1...N_z)$. Тогда физическое и волновое представление в ящике высотой 1 и квадратным основанием длиной λ связаны соотношением

$$f(x, y, z) = \sum_{n_x = -N_x/2}^{N_x/2} \sum_{n_y = -N_y/2}^{N_y/2} \sum_{n_z = N_z/2}^{N_z/2} \hat{f}(n_x, n_y, n_z) \times \times e^{i(k_x x + k_y y)} \phi(k_z z), \tag{16}$$

где

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{\lambda}, \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{\lambda}, \quad k_z = \frac{2\pi n_z}{\lambda} \tag{17}$$

и $\phi = \sin$ или $\cos$ (или их комбинации) в зависимости от вида граничных условий. Далее для удобства мы опускаем символ ^. В качестве дополнительных граничных условий в k -пространстве мы полагаем $T, \mathbf{V}, \mathbf{B} = 0$ для $\mathbf{k} = 0$.

Вычисления проводились на сетках N^3, $N = 64$. Для избежания ошибок при вычислениие нелинейных членов в высокочастотной области использовалось правило 3/2 [Canuto et al., 1988] (aliasing rule).

5. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Тепловая конвекция с вращением характеризуется появлением большого числа вертикальных вращающихся колонок (циклонов-антициклонов). Их число зависит от числа Экмана как $k_c \sim E^{-1/3}$ [Chandrasekhar, 1961]. Для жидкого ядра Земли $E \sim 10^{-15}$, что очевидно не позволяет проводить вычисления при реалистичных значениях параметра. Обычно, удается добиться режимов с $E = 10^{-4}$–10^{-6} [Jones, 2000]. Вторым важным параметром является число Рэлея, характеризующее интенсивность тепловой конвекции. Критическое число Рэлея при котором начинается конвекция зависит от числа Экмана как $\mathrm{Ra}^{\mathrm{cr}} \sim E^{-1/3}$. Увеличение порогового значения связано с появлением мелкомасштабной конвекции, приводящей к повышенной диссипации. Далее мы рассмотрим три режима конвекции:

[NR:] Режим без вращения, $\mathrm{Ra} = 9 \times 10^5$, $\mathrm{Pr} = 1$, $E = 1$, $\mathrm{Re} \sim 700$.

[$R1$:] Режим с вращением, $\mathrm{Ra} = 4 \times 10^2$, $\mathrm{Pr} = 1$, $E = 2 \times 10^{-5}$, $\mathrm{Re} \sim 200$.

[$R2$:] Режим с вращением, $\mathrm{Ra} = 1 \times 10^3$, $\mathrm{Pr} = 1$, $E = 2 \times 10^{-5}$, $\mathrm{Re} \sim 10^4$.

Режим $R1$ соответствует геострофическому состоянию конвекции вблизи порога генерации, характеризуемого регулярной пространственной структурой циклонов. Увеличение Ra (режим $R2$) приводит к нарушению упорядоченности циклонов, появлению мелкомасштабных течений, отклонению от геострофии. Нелинейный член становится сравнимым с силой Кориолиса и градиентом давления, временное поведение становится более хаотическим. На рис. 1 приведено характерное распределение полей в горизонтальном и вертикальном сечениях для режима $R2$, также обладающего высокой степенью геострофии. Хорошо заметна корреляция T и V_z.

Циклоническая конвекция генерирует крупномасштабную спиральность. Знак спиральности определяется сходимостью или расходимостью возникающих плюмов. Пусть для определенности мы имеем дело с восходящим потоком. Тогда в силу закона сохранения момента импульса в нижней области восходящего плюма $\mathcal{H}^{\mathcal{K}}$ будет положительна, а в верхней – отрицательна, см. рис. 2 (режим $R2$). Для нисходящего потока знак спиральности тот же. В силу используемых граничных условий для $\mathbf{V}$ спиральность равна нулю на границах. При увеличении чисел Рейнольдца Re максимум генерации спиральности будет приближаться к границе. Как следует из уравнения (10), спиральность разного знака переносится конвекцией в основной объем от границ. В этом случае зависимость спиральности становится линейной в основном объеме и меняет знак при $z = 0.5$.

Рассмотрим спектры кинетической энергии, рис. 3. Спектр без вращения NR близок к колмогоровскому. Режим с вращением $R1$ близок к пороговому. На интегральном спектре (верхний рисунок) хорошо виден пик $k_c \sim 8$, соответствующий циклоническим течениям. В силу Кюпперс-Лортцевской неустойчивости [Küppers, Lortz, 1969; Jones and Roberts, 2000] горизонтальные конвективные валы, возникающие при больших значениях E, быстро разрушаются. Отметим, что для режима $R1$ спектры кинетической энергии $E_K(k_\perp)$ и $E_K(k_\parallel)$ сильно различаются. Поперечный спектр для $k < k_c$ близок к белому, а $E_K(k_\parallel) \sim k^{-3}$.

При увеличении Ra (режим $R2$) провал в спектре начинает заполняться и интегральный спектр становится похожим на спектр без вращения. Обратим внимание, что в горизонтальной части спектра появляются моды, с энергией большей, чем на масштабе лидирующей моды $1/k_c$. Заполнение спектра для вертикальной части спектра происходит более плавно и быстро приближается к колмогоровской зависимости. Заполнение спектра также наблюдается в задачах со сферической геометрией см. [Решетняк, 2006] и в каскадных моделях турбулентности [Reshetnyak and Steffen, 2006]. Обратим внимание на быстрое спадание спектра в области $k > k_c$ как $\sim k^{-n}$, $n = 7$–8, близкое к наблюдаемому в [Métais et al., 1996].

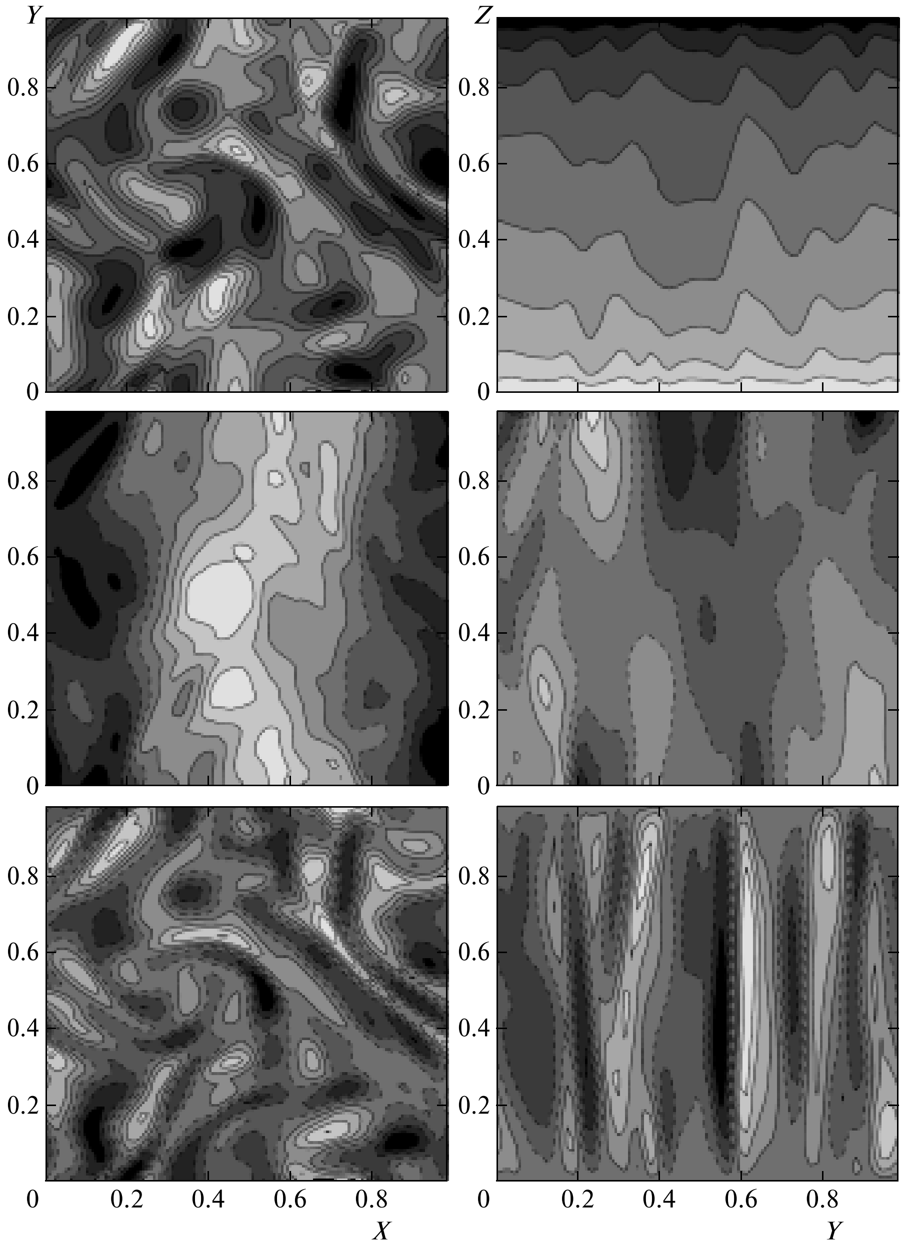

Рис. 1. Тепловая конвекция с вращением для Pr = 1, Ra = 1.3×10^3, $E = 2 \times 10^{-5}$. Сечения полей T – верхний ряд (0, 1, 0.43, 0.60), V_y – компонента скорости (средний ряд) (-745, 548, -904, 979) и V_z – компонента скорости (нижний ряд) (-510, 501, -651, 784). Левая колонка соответствует сечению плоскостью $z = 0.5$, правая колонка – плоскостью $x = 0$. Значения в скобках означают диапазону значений, пунктирные изолинии соответствуют отрицательным значениям полей.

Рассмотрим спектр спиральности $S^H = |\mathbf{V} \cdot \omega^*|$, где ω^* – знак комплексного сопряжения. Для $R1$ $S^H = 0$, что соответствует условию $V_x/V_x^* = V_y/V_y^* = V_z/V_x^* = \text{const}$. Как и для спектров кинетической энергии основное различие для режимов NR и $R2$ наблюдается для тангенциальных компонент спектра, см. рис. 4. Продольные части спектра близки для обоих режимов. Для спектра спиральности максимум, связанный с положением лидирующей моды k_c для режима $R2$, более ярко выражен, чем в спектре энергий рис. 3.

Однако наблюдаемое сходство в поведении спектров $R2$ и NR еще не свидетельствует о сходстве физических процессов. Напомним, что в двумерной турбулентности [Kraichnan and Montgomery, 1980] также наблюдается спектр кинетической энергии $\sim k^{-5/3}$, но передача энергии происходит не от больших масштабов к меньшим, а наоборот. Оценка для отношения конвективного члена в

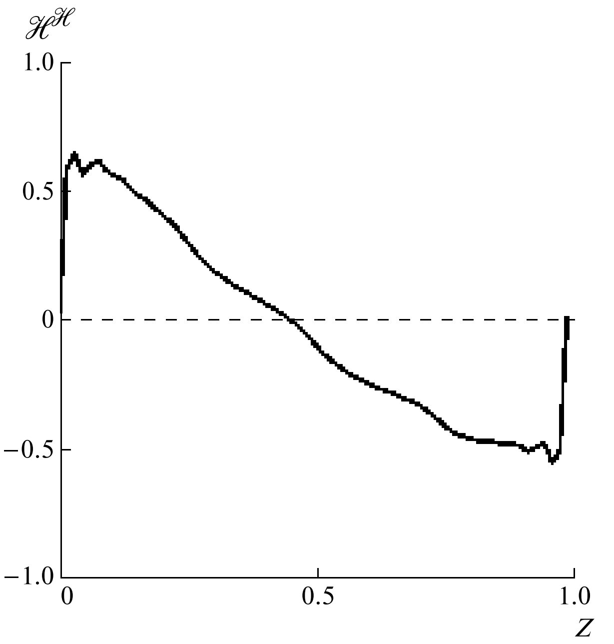

Рис. 2. Профиль гидродинамической спиральности $\mathcal{H}^{\mathcal{H}}(z)$ для $R2$, нормированной на среднее значение кинетической энергии.

уравнении Навье-Стокса к силе Кориолиса на основном масштабе $\mathcal{R} = E\mathrm{Pr}^{-1}\mathrm{Re}$, $\mathrm{Pe} = \sqrt{2E_K}$ – число Пекле и $\mathrm{Re} = \mathrm{PePr}^{-1}$ – гидродинамическое число Рейнольдца, дает $\mathcal{R} = 0.004$ для $R1$ и $\mathcal{R} = 0.02$ для $R2$, что соответствует геостофическому балансу, т.е. $\mathcal{R} \ll 1$. Для режима же NR $\mathcal{R} \sim 600$.

Рассмотрим что происходит с потоками энергии в волновом пространстве. Режим NR демонстрирует хорошо известную картину колмогоровского прямого каскада кинетической энергии рис. 5. Для больших масштабов $\mathcal{T}^< < 0$ – эти масштабы являются источниками энергии. По мере перехода в инфракрасную часть спектра знак потока меняется на положительный – энергия потребляется. Для двумерной турбулентности наблюдается зеркальносимметричная картина для потока [Kraichnan and Montgomery, 1980]. В этом случае вместо прямого каскада энергии наблюдается обратный каскад.

Вращение существенно меняет поведение потоков энергии. Энергонесущим волновым числом является k_c. Для $k > k_c$ мы также наблюдаем прямой каскад энергии $\mathcal{T}^< > 0$. Максимум $\mathcal{T}^<$ смещен относительно максимума спектра вправо тем больше, чем больше Re. Для $k < k_c$ картина существенно сложнее: для небольших волновых чисел наблюдается обратный каскад энергии $\mathcal{T}^< > 0$. В тоже время в большей части области волновых чисел $(0\ldots k_c)$ каскад по прежнему прямой, $\mathcal{T}^< < 0$. Увеличение Re приводит к сужению области с обратным каскадом и повышению амплитуды об-

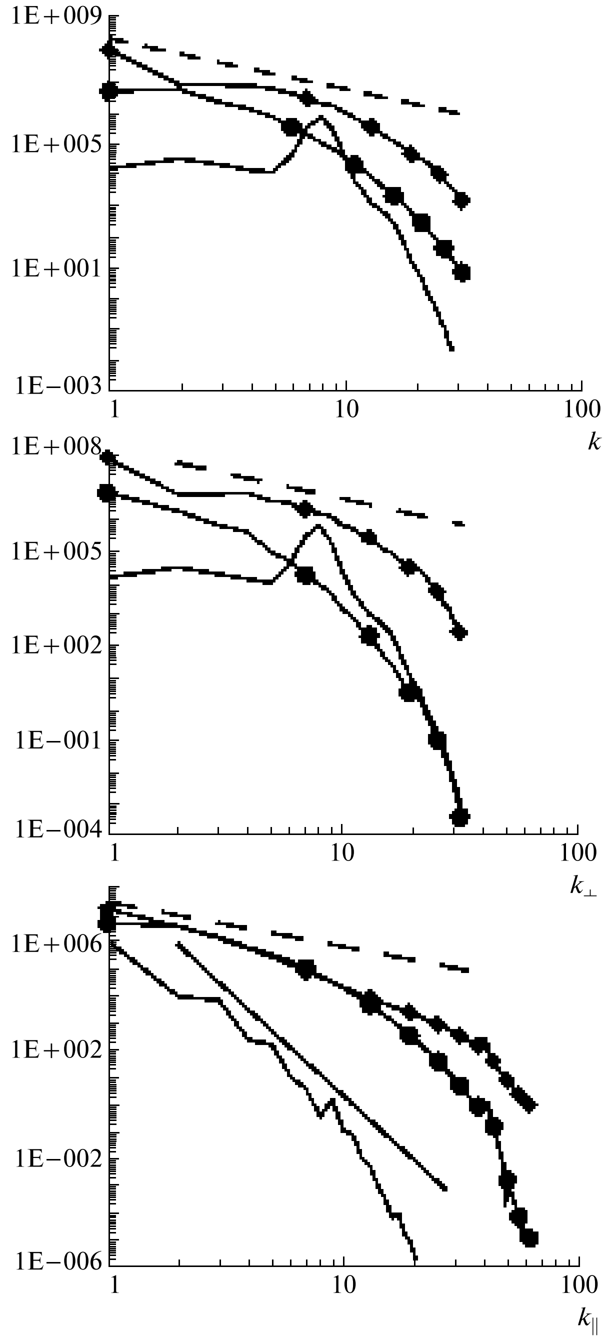

Рис. 3. Спектры кинетической энергии для режимов NR (кружочки), $R1$, $R2$ (ромбики). Штриховая линия соответствует спектру Колмогорова $\sim k^{-5/3}$; сплошная линия на нижнем рисунке – $\sim k^{-3}$. На верхнем рисунке представлены зависимости от модуля волнового числа $k = |\mathbf{k}|$, на среднем спектры кинетической энергии в зависимости от горизонтального волнового числа $k_\perp$ и на нижнем зависимости от продольного волнового числа $k_\parallel \equiv k_z$.

ратного потока. Можно предположить, что смена знака потока $\mathcal{T}^<$ в области $k < k_c$ связана с появлением нелокального переноса энергии: на большие масштабы $\mathbf{k}_1$ энергия поступает от мод $|\mathbf{k}_2| \sim$

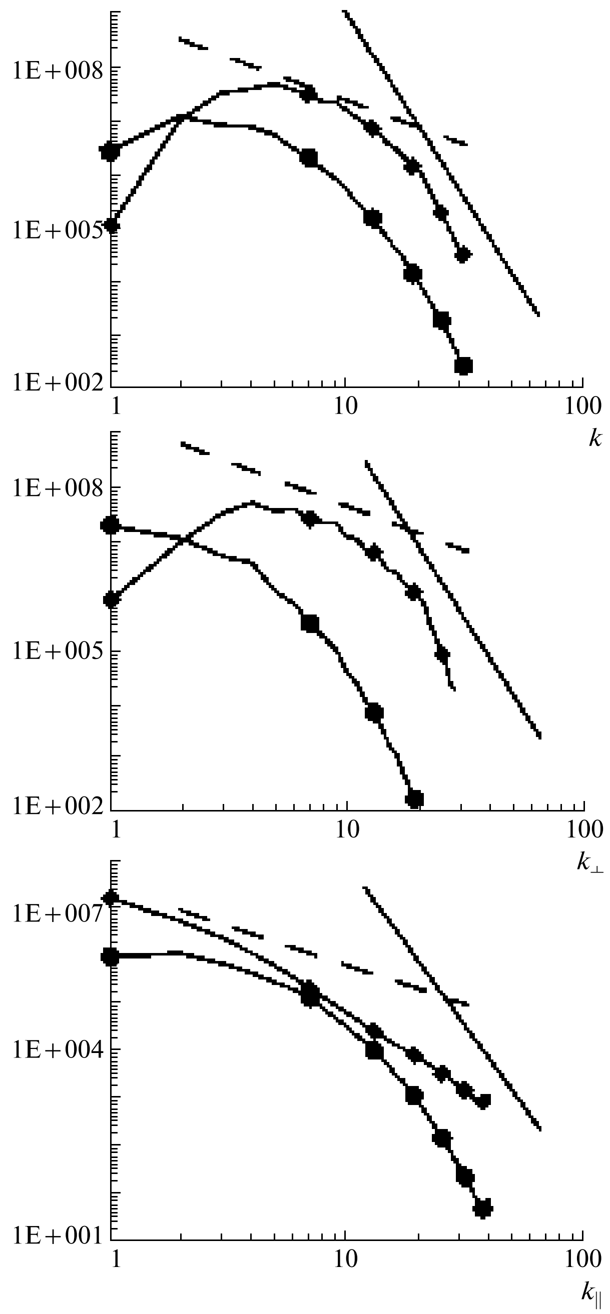

Рис. 4. Спектры гидродинамической спиральности для режимов *NR* (кружочки), *R*1 (ромбики). Штриховая и сплошная линии соответствуют $\sim k^{-5/3}$, k^{-7}.

$\sim |\mathbf{k}_3| \geqslant |\mathbf{k}_1|$, $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$, см. подробней в [Waleffe, 1992].

Распределение потоков гидродинамической спиральности в волновом пространстве повторяет поведение потоков кинетической энергии. Этим трехмерная турбулентность существенно отличается от поведения двумерной турбулентности, в которой направление потока кинетической энергии и второго инварианта (энстрофии) имеют разное направление относительно точки впрыска энергии, энстрофии. Обратим внимание, что энстрофия, как и кинетическая энергия, является положительно определенной величиной, в то время как спиральность – знакопеременна.

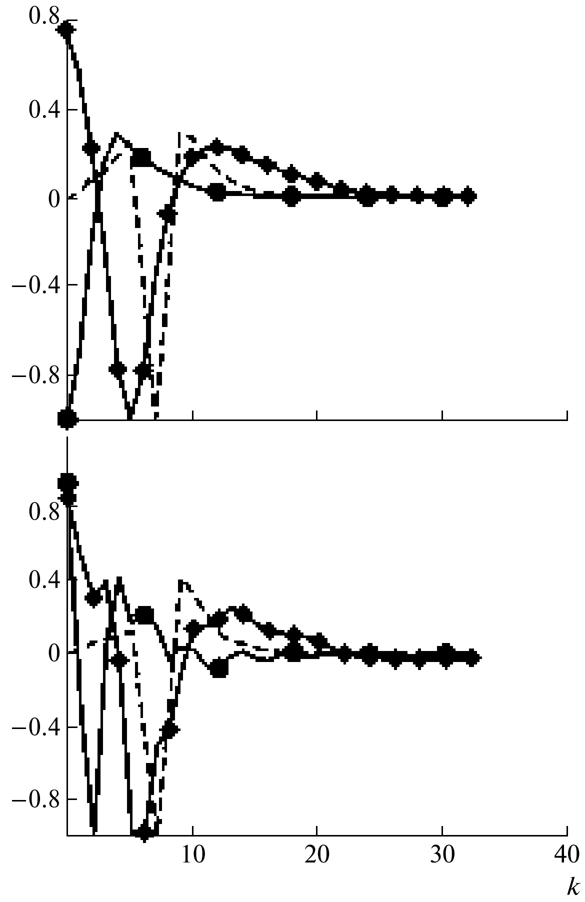

Рис. 5. Потоки $\mathcal{T}$ кинетической энергии (верхний рисунок) и гидродинамической спиральности $\mathcal{H}^{\mathcal{H}}$ (нижний рисунок) в волновом пространстве: *NR* (кружочки), *R*1 (пунктир), *R*2 (ромбики).

6. ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

С геофизической точки зрения интерес к достаточно простой геометрии течений, рассмотренных выше, вызван двумя обстоятельствами: во-первых, циклоническая турбулентность наблюдаемая в задачах со сферической геометрией близка по свойствам к результатам нашего моделирования. Поскольку нас интересуют режимы с большими Re, то мы надеемся, что многие основные черты решения уже не зависят от вида граничных условий и геометрии. В тоже время, моделирование режимов с малыми E в нашем случае намного проще. С другой стороны, как показывает опыт моделирования с магнитным полем, форма течений, во всяком случае визуально, мало меняется при переходе к полной задаче динамо [Jones, 2000], хотя возможно некоторое изменение отношения полоидальной и тороидальной компонент кинетической энергии [Решетняк, 2007].

Выше нам удалось показать, что наблюдаемое сходство спектров кинетической энергии в случае без вращения и с вращением еще не является основанием для вывода о сходстве процессов. В случае с вращением показано существование диапазона волновых чисел, в котором энергия передается от больших k к малым. Существование такой возможности в жидком ядре Земли было рассмотрено в [Решетняк, 2005]. Интересно, что решение задачи на собственные значения в конвекции Буссинеска в виде $\exp(i(\gamma t + k_x x + k_y y + k_z z))$ давало, что $\mathrm{Re}\gamma > 0$ возможно при $k_x \sim k_y > 10^2$, $k_z \sim 1$, т.е. объяснить существование крупномасштабной конвекции можно было предположив как возникновение обратного каскада кинетической энергии, так и за счет передачи энергии на большие масштабы в процессе генерации крупномасштабного магнитного поля, например, в рамках теории динамо средних полей [Krause and Rädler, 1980]. Последний сценарий является экстремальным, так как может привести к полному исчезновению магнитного поля [Решетняк, 2005]. В этой связи моделирование обратного каскада энергии в чисто гидродинамической задаче без магнитного поля является весьма интересным результатом.

Работа была выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-05-64074).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

— *Обухов А.М.* О распределении энергии в спектре турбулентного потока // Изв. АН СССР (География и Геофизика). 1941. Т. 5. № 4–5. С. 453–466.

— *Решетняк М.Ю.* Динамо-катастрофа, или почему магнитное поле Земли живет так долго? // Геомагнетизи и аэрономия. 2005. Т. 45. № 5. С. 538–548.

— *Решетняк М.Ю.* Гидромагнитная спиральность в моделях геодинамо Буссинесковского типа // Физика Земли. 2006. № 6. С. 3–13.

— *Решетняк М.Ю.* Тепловая конвекция и динамо при быстром вращении // Физика Земли. 2007. № 8. С. 23–32.

— *Braginsky S.I., Meytlis V.P.* Local turbulence in the Earth's core // Geophys. Astrophys. Fluid Dynam. 1991. V. A55. P. 71–87.

— *Braginsky S.I., Roberts P.H.* Equations governing convection in Earth's core and the geodynamo // Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics. 1995.V. 79. P. 1–97.

— *Buffett B.* A comparison of subgrid-scale models for large-eddy simulations of convection in the Earth's core // Geophys. J. Int. 2003. V. 153. P. 753–765.

— *Canuto C., Hussaini M.Y., Quarteroni A., Zang T.A.* Spectral methods in Fluids Dynamics. N.Y.: Springer-Verlag, 1988.

— *Cattaneo F., Emonet T., Weis N.* On the interaction between convection and magnetic fields // ApJ. 2003. V. 588. P. 1183–1198.

— *Chandrasekhar S.* Hydrodynamics and hydromagnetic stability. N.Y.: Dover Publications. Inc., 1961.

— *Frisch U.* Turbulence: the Legacy of A.N. Kolmogorov. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

— *Hossain M.* Reduction of dimensionality of turbulence due to a strong rotation // Phys. Fluids. 1994. V. 6. № 3. P. 1077–1080.

— *Jones C.A.* Convection-driven geodynamo models // Phil. Trans. R. Soc. London. 2000. V. A358. P. 873–897.

— *Jones C.A., Roberts P.H.* Convection Driven Dynamos in a Rotating Plane Layer // J. Fluid Mechanics. 2000.V. 404. P. 311–343.

— *Kraichnan R.H. Montgomery D.* Two-dimensional turbulence // Rep. Prog. Phys. 1980. V. 43. P. 547–619.

— *Krause F., Rädler K.-H.* Mean field magnetohydrodynamics and dynamo theory. Berlin: Akademie-Verlagб 1980.

— *Küppers G., Lortz D.* Transition from laminar convection to thermal turbulence in a rotating fluid layer // J. Fluid Mechanics. 1969. V. 35. P. 609–620.

— *Métais O., Bartello P., Garnier E., Riley J.J., Lesieur M.* Inverse cascade in stably stratified rotating turbulence // Dynamics of Atmospheres and Oceans. 1996. V. 23. P. 193–203.

— *Orszag S.A.* Numerical simulation of incompressible flows within simple boundaries. I. Galerkin (spectral) representations // Stud. Appl. Math. V.L. 1971. № 51. P. 293–327.

— *Pedlosky J.* Geophysical Fluid Dynamics. N.Y.: Springer-Verlag, 1987.

— *Rose H.A., Sulem P.I.* Fully developed turbulence and statistical mechanics // J. Physique. 1978. V. 39. P. 441–484.

— *Reshetnyak M., Steffen B.* Shell models in rapidly rotating dynamo systems // Numerical Methods and Programming. V. 7. P. 85–92. 2006. http://www.srcc.msu.su/num-meth/english/index.html

— *Smith L.M., Waleffe F.* Transfer of energy to two-dimensional large scales in forced, rotating three-dimensional turbulence // Phys. Fluids. 1999. V. 11. № 6. P. 1608–1622.

— *Waleffe F.* The nature of triad interactions in homogeneous turbulence // Phys. Fluids. V. A4. № 2. 1992. P. 350–363.