

УДК 550.383

КАСКАДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В МАГНИТОСТРОФИЧЕСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

© 2008 г. М. Ю. Решетняк

Представлено академиком А.О. Глико 23.10.2007 г.

Поступило 25.10.2007 г.

Согласно теории динамо, магнитные поля планеты генерируются течениями проводящей среды [1]. Источниками энергии в той или иной пропорции являются радиоактивный разогрев и дифференциация легкой и тяжелой фракций в ядре. Даже для наиболее изученного геомагнитного поля из палео- и археомагнитных наблюдений удается получить только первую декаду в пространственном спектре и гармоники с временными периодами лишь большими 1–10 лет [2]. В то же время оценки гидродинамического и магнитного числа Рейнольдса ($Re \sim 10^9$, $R_m \sim 10^3$) [3] свидетельствуют о существовании протажженного короткопериодного интервала спектра, лежащего за пределами наблюдений. В отличие от колмогоровской турбулентности, где спектр кинетической энергии убывает как $\sim k^{-5/3}$, в ядрах планет наблюдается геострофический (магнитогеострофический) баланс: сила Кориолиса (и сила Лоренца) одного порядка с градиентом давления [4]. В таких системах возможны режимы, когда лидирующая мода циклонической конвекции с $k_c \sim E^{-1/3}$ (k – волновое число, E – число Экмана*) может превосходить по амплитуде спектральные гармоники с $k < k_c$ [5, 6]. В этой связи изучение спектральных свойств мелкомасштабной магнитогеострофической (МГД) турбулентности становится ключевым моментом для развития теории динамо средних полей [7]. Далее мы рассмотрим модель магнитогеострофической турбулентности в прямоугольном ящике, позволяющую получить решение задачи тепловой конвекции и динамо для $E \ll 1$, и остановимся на механизмах передачи энергии в волновом пространстве.

Рассмотрим уравнения динамо [6] для несжимаемой жидкости ($\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$) во вращающемся с

*Для Земли $E \approx 10^{-15}$.

*Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта
Российской Академии наук, Москва*

угловой скоростью Ω относительно вертикальной оси z бесконечном слое $0 \leq z \leq 1$. Введем следующие единицы измерения для скорости \mathbf{V} , времени t , давления Z и магнитного поля \mathbf{B} : $\frac{\kappa}{L}$, $\frac{L^2}{\kappa}$, $\frac{\rho \kappa^2}{L^2}$

и $\sqrt{2\Omega\rho\kappa\mu_0}$, где L – единица длины, κ – коэффициент молекулярной теплопроводности, ρ – плотность вещества, μ_0 – магнитная постоянная, запишем систему уравнений динамо в декартовой системе координат (x, y, z) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \text{rot}(\mathbf{V} \times \mathbf{B}) + q^{-1} \Delta \mathbf{B}, \\ E \cdot \text{Pr}^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}) \right] &= \text{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B} - \nabla P - \\ &- \mathbf{1}_z \times \mathbf{V} + \text{Ra} T \mathbf{1}_z + E \Delta \mathbf{V}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)(T + T_0) &= \Delta T. \end{aligned} \quad (1)$$

Безразмерные числа Прандтля, Экмана, Рэлея и Робертса заданы в виде:

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\kappa}, \quad E = \frac{\nu}{2\Omega L^2}, \quad \text{Ra} = \frac{\alpha g_0 \delta T L}{2\Omega \kappa}, \quad q = \frac{\kappa}{\eta},$$

где ν – коэффициент кинематической вязкости, α – коэффициент объемного расширения, g_0 – ускорение свободного падения, δT – единица возмущения температуры T относительно “диффузионного” распределения температуры $T_0 = 1 - z$, η – коэффициент магнитной диффузии. Задача замыкается периодическими граничными условиями в горизонтальных направлениях. Для границ $z = 0, 1$ принимаем $T = 0$, $V_z = \frac{\partial V_x}{\partial z} = \frac{\partial V_y}{\partial z} = 0$, $B_x = B_y = \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$.

С численной реализацией псевдоспектрального

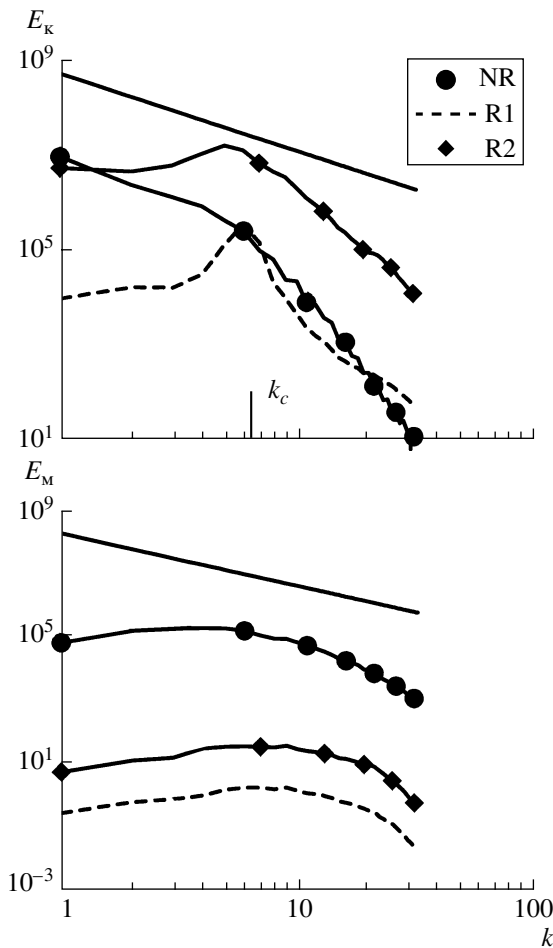


Рис. 1. Спектры кинетической и магнитной энергии для режимов NR, R1, R2. Прямая линия соответствует спектру Колмогорова $\sim k^{-5/3}$.

кода на параллельных процессорах задачи (1) можно ознакомиться в [6]. Вычисления проведены на сетке 64^3 .

Далее мы рассмотрим поведение системы (1) для трех режимов:

NR: режим без вращения (сила Кориолиса равна нулю), $Ra = 9 \cdot 10^5$, $Pr = 1$, $E = 1$, $Re \sim 700$, $q = 5$;

R1: режим с вращением, $Ra = 4 \cdot 10^2$, $Pr = 1$, $E = 2 \cdot 10^{-5}$, $Re \sim 200$, $q = 10$;

R2: режим с вращением, $Ra = 10^3$, $Pr = 1$, $E = 2 \cdot 10^{-5}$, $Re \sim 10^4$, $q = 3$.

После процесса установления решение имеет квазипериодическое поведение. На рис. 1 представлены спектры кинетической и магнитной энергий. Следует отметить максимум кинетической энергии на k_c , связанный с появлением циклонов-антициклонов, вызванных быстрым вращением ($E \ll 1$). Спектры магнитной энергии, хотя и не имеют ярко выраженного максимума на

k_c , также не убывают на интервале $k < k_c$. Интересно отметить, что после отказа от модели сверхвязкости в модели геодинамики [8] спектры полей в интервале $k < k_c \approx 20$ также слабо зависели от k . В целом спектры магнитной энергии мало зависят от вращения.

Несмотря на статистическую стационарность рассмотренных процессов динамики данные процессы являются диссипативными (т.е. необратимыми) и в строгом смысле неравновесными [9]. Последнее выражается в направленных потоках энергии в волновом пространстве. Возможно существование инерционных интервалов спектра между волновым числом k_i , где энергия вводится, и диссипационным волновым числом $k_d > k_i$, где энергия диссипирует. Для модели Колмогорова в инерционном интервале наблюдается степенная зависимость $\sim k^{-5/3}$.

Для анализа потоков энергии в волновом пространстве рассмотрим следующий прием [10]. Представим поле f в виде низкочастотной и высокочастотной составляющих: $f(\mathbf{r}) = f^<(\mathbf{r}) + f^>(\mathbf{r})$, где

$$f^<(\mathbf{r}) = \sum_{|k| \leq K} \hat{f}_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad f^>(\mathbf{r}) = \sum_{|k| > K} \hat{f}_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (2)$$

Для периодических полей f и g имеем [10]:

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial g}{\partial x} \right\rangle = 0, \quad \left\langle g \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle = - \left\langle f \frac{\partial g}{\partial x} \right\rangle, \quad (3)$$

$$\langle f^> g^< \rangle = 0,$$

где

$$\langle f(\mathbf{r}) \rangle = \mathcal{V}^{-1} \int_{\mathcal{V}} f(\mathbf{r}) d\mathbf{r}^3 \quad (4)$$

означает осреднение поля f по объему \mathcal{V} . Умножив уравнение Навье–Стокса и уравнение индукции на $\mathbf{V}^<$ и $\mathbf{B}^<$ соответственно, получаем выражения для интегральных потоков кинетической

$E_k = \frac{V^2}{2}$ и магнитной $E_m = \frac{B^2}{2}$ энергий из области

$k \geq K$ в область $k < K$

$$\Pi_k = \langle (\mathbf{V} \times \text{rot} \mathbf{V}) \cdot \mathbf{V}^< \rangle, \quad (5)$$

$$\Pi_m = \langle \text{rot}(\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}^< \rangle$$

и поток для работы силы Лоренца:

$$\Pi_L = \langle (\text{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{V}^< \rangle. \quad (6)$$

Введя

$$\mathcal{T}_k(k) = - \frac{\partial \Pi_k}{\partial k}, \quad (7)$$

имеем наглядное соотношение для E_k в k -пространстве [10]:

$$\frac{\partial E_k(k)}{\partial t} = \mathcal{T}(k) + F(k) + D(k), \quad (8)$$

где $k = |\mathbf{k}|$, $\mathcal{T}(k)$ – поток энергии от гармоник с другими k , $F(k)$ – работа внешних сил, $D(k) = -k^2 E_k(k)$ – диссипация. Точный вид величин \mathcal{T} имеет вид

$$\mathcal{T}_k = -\frac{\partial \Pi_k}{\partial k}, \quad \int_{k=0}^{\infty} \mathcal{T}_k(k) dk = 0, \quad \mathcal{T}_m = \frac{\partial \Pi_m}{\partial k}, \quad (9)$$

$$\mathcal{T}_L = \frac{\partial \Pi_L}{\partial k}.$$

В силу соотношения $\text{rot}(\mathbf{V} \times \mathbf{B}) = -(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{V}$ имеем: $\mathcal{T}_m = \mathcal{T}_N - \mathcal{T}_L$, где

$$\mathcal{T}_N = -\frac{\partial \Pi_N}{\partial k}, \quad \int_{k=0}^{\infty} \mathcal{T}_N(k) dk = 0, \quad (10)$$

$$\Pi_N = \langle ((\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{B}^{\langle \rangle}) \cdot \mathbf{B}^{\langle \rangle} \rangle.$$

На рис. 2 представлены потоки кинетической \mathcal{T}_k и магнитной \mathcal{T}_m энергии для трех режимов, рассмотренных выше. Режим NR для \mathcal{T}_k демонстрирует хорошо известную картину колмогоровского прямого каскада* кинетической энергии. Для больших масштабов $\mathcal{T}_k < 0$ – эти масштабы являются источниками энергии. По мере перехода в инфракрасную часть спектра знак потока меняется на положительный – энергия потребляется. Для двумерной турбулентности наблюдается зеркально-симметричная относительно оси абсцисс картина для \mathcal{T}_k [11]. В этом случае вместо прямого каскада энергии наблюдается обратный каскад.

Вращение существенно меняет поведение потоков кинетической энергии. Энергонесущим волновым числом является k_c . Для $k > k_c$ мы также наблюдаем прямой каскад энергии $\mathcal{T}_k > 0$. Максимум \mathcal{T}_k смещен относительно максимума спектра вправо тем больше, чем больше Re . Для $k < k_c$ картина существенно сложнее: для небольших волновых чисел наблюдается обратный каскад энергии $\mathcal{T}_k > 0$. В то же время в большей части области волновых чисел $(0, \dots, k_c)$ каскад по-прежнему прямой, $\mathcal{T}_k < 0$. Увеличение Re приводит к сужению области с обратным каскадом и увеличению обратного потока. Можно предположить, что смена знака потока \mathcal{T}_k в области $k < k_c$ связана с появлением нелокального переноса энергии: на большие масштабы \mathbf{k}_1 энергия поступает от мод

*Прямым (обратным) каскадом называется поток от меньших (больших) k к большим (меньшим) k .

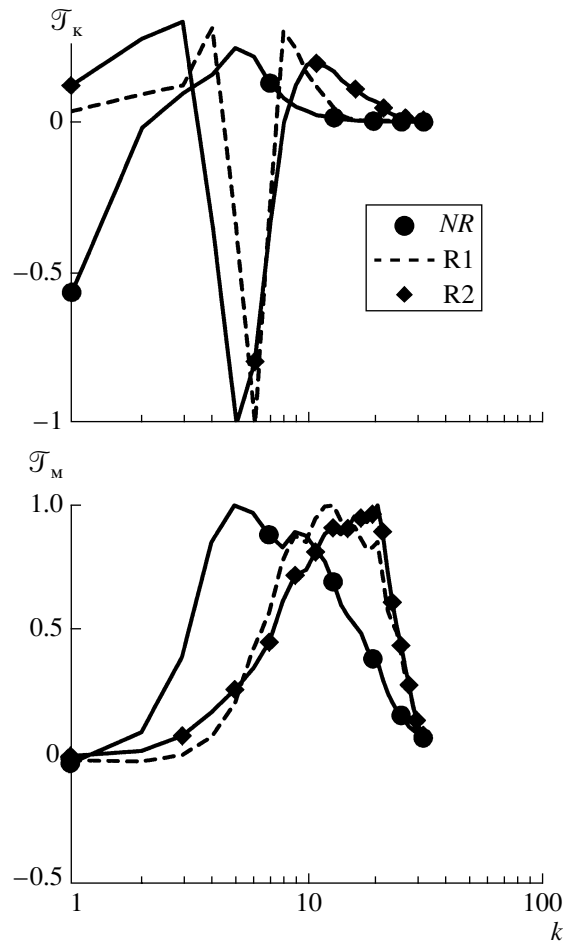


Рис. 2. Нормированные потоки кинетической \mathcal{T}_k и магнитной \mathcal{T}_m энергии в волновом пространстве для режимов NR, R1, R2. Значения абсолютных экстремумов для трех режимов: $-2.3 \cdot 10^{12}$, $-8.3 \cdot 10^{10}$, $-2.4 \cdot 10^{13}$ (вверху), $2.0 \cdot 10^{11}$, $2.3 \cdot 10^6$, $8.1 \cdot 10^7$ (внизу).

$|\mathbf{k}_2| \sim |\mathbf{k}_3| \gg |\mathbf{k}_1|$, $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$ (подробнее см. в [12]). При отсутствии магнитного поля появляется положительный максимум \mathcal{T}_k ($k = 1$). Таким образом, в случае с вращением одновременно наблюдаются прямой и обратный каскады кинетической энергии, разнесенные в волновом пространстве.

Рассмотрим магнитную часть. В отличие от \mathcal{T}_k \mathcal{T}_m включает в себя не только переносной член, но и генерационный, что приводит к положительности интеграла от \mathcal{T}_m по всему волновому пространству. Более того, \mathcal{T}_m везде положительно. Положение максимума \mathcal{T}_m близко к положению максимумов в спектрах E_m, \mathcal{T}_k .

Очевидно что для планетарных ядер расстояние между максимумами в потоках \mathcal{T}_m для NR и R1, R2 может быть весьма большим, но все же не таким большим, как k_c . Последнее утверждение свя-

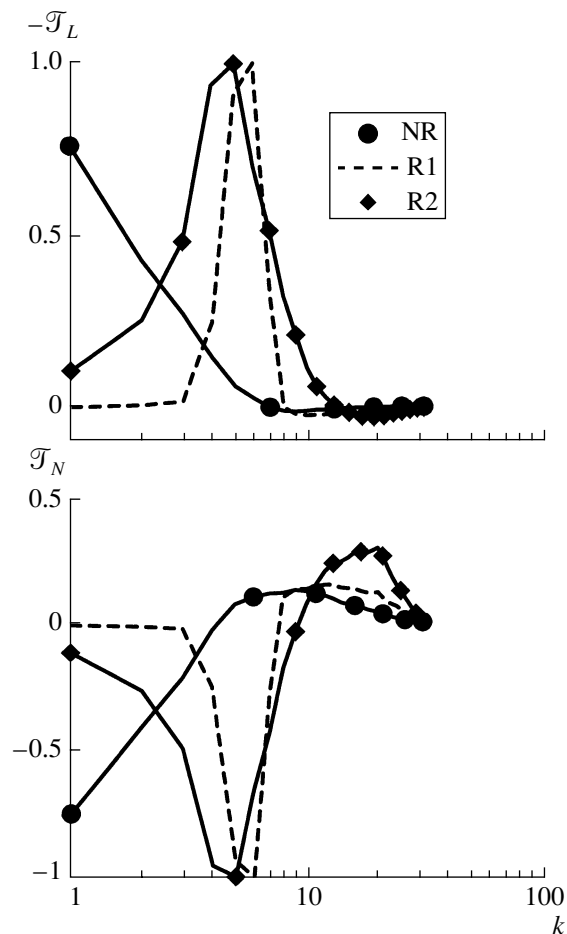


Рис. 3. Нормированные потоки генерационного члена $-\mathcal{T}_L$ и переносного члена \mathcal{T}_N для режимов NR, R1, R2. Значения абсолютных экстремумов для трех режимов: $1.4 \cdot 10^{12}$, $1.8 \cdot 10^7$, $3.2 \cdot 10^8$ (вверху); $-1.4 \cdot 10^{12}$, $-1.7 \cdot 10^7$, $-3.0 \cdot 10^8$ (внизу).

зано с условием генерации, сводящимся к ограничению на величину локального магнитного числа на масштабе $\frac{1}{k}$ Рейнольдса $r_m = \frac{v_k}{k\eta} > 1$, и тем, что для планет $\eta \gg v$. В то же время для малых k потоки малы, т.е. система находится в состоянии статистического равновесия: диссипация на больших масштабах пренебрежимо мала.

Остановимся подробнее на вопросе, откуда берется магнитная энергия на масштабе k : связано ли это с переносом по спектру или с процессом генерации.

На рис. 3 изображены потоки $-\mathcal{T}_L$, связанные с генерационным членом. Максимум генерационного члена для случая без вращения приходится на большой масштаб, в то время как для случая с вращением приходится на $\sim \frac{1}{k_c}$. Интересно, что в об-

ласти больших k для режимов с вращением существует область ($-\mathcal{T}_L < 0$), где магнитное поле усиливает конвекцию. Для режима NR величина $-\mathcal{T}_L$ быстро падает в связи с убыванием спектра кинетической энергии (рис. 1). Суммируя, имеем: для случая с вращением генерация осуществляется циклоническими вихрями, в то время как для случая NR работает крупномасштабное динамо.

Оценим отдельно вклад переносного члена \mathcal{T}_N . Для случая без вращения зависимости \mathcal{T}_N и \mathcal{T}_k близки: наблюдается прямой каскад энергии. Для случая с вращением область $k \sim k_c$ является источником энергии. В отличие от \mathcal{T}_k величина \mathcal{T}_N не имеет положительных участков при малых k , т.е. обратный каскад магнитной энергии, связанный с переносным членом в этой области, отсутствует. Обратим внимание на соотношение амплитуд потоков \mathcal{T}_m , $-\mathcal{T}_L$, \mathcal{T}_N (см. подписи к рис. 2, 3). Легко заметить, что для всех трех случаев $\frac{|\mathcal{T}_m|}{|\mathcal{T}_L|} \sim 10^{-1}$, т.е. существуют разнонаправленные

потоки магнитной энергии в волновом пространстве, связанные с традиционным переносом энергии по спектру (переносной член) и работой сил Лоренца. Области наибольшей генерации магнитного поля совпадают с областями наиболее эффективного переноса магнитной энергии \mathcal{T}_N (от малых k к большим k). Такая балансировка приводит к установлению равновесного состояния, когда магнитная диссипация играет роль лишь на малых масштабах.

Возвращаясь к рис. 2, отметим локализацию полного потока \mathcal{T}_m в области $k \gg 1$. Для случая без вращения это связано с тем, что средняя спиральность и, соответственно, α -эффект равны нулю [5, 6]. Поэтому обратный каскад магнитной энергии в область малых k отсутствует. Для вращения наблюдается баланс притока энергии за счет работы сил Лоренца и ее оттока в область больших k за счет переносного члена. Это снижает эффективность α -эффекта, ответственного за генерацию крупномасштабного магнитного поля турбулентностью.

Работа была выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 03-05-64074).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hollerbach R., Rüdiger R.* The Magnetic Universe. Weinheim: Wiley-VCH, 2004. 332 p.
2. *Geomagnetism/J.A. Jacobs, Ed.* N.Y.: Acad. Press, 1988. V. 1. 579 p.
3. *Решетняк М.Ю.* // ДАН. 2005. Т. 400. № 1. С. 105–109.

4. *Pedlosky J.* Geophysical Fluid Dynamics. N.Y.: Springer, 1987. 710 p.
5. *Решетняк М.Ю.* // Физика Земли. 2006. Т. 6. С. 3–13.
6. *Решетняк М.Ю.* // Физика Земли. 2007. Т. 8. С. 23–32.
7. *Krause F., Rädler K.-H.* Mean Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory. В.: Akademie-Verlag, 1980. 271 p.
8. *Roberts P.H., Glatzmaier G.A.* // Philos. Trans. Roy. Soc. London. 2000. V. 358. P. 1109-1121.
9. *Rose H.A., Sulem P.I.* // J. Phys. 1978. V. 39. P. 441–484.
10. *Frisch U.* Turbulence: the Legacy of A. N. Kolmogorov. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. 296 p.
11. *Kraichnan R.H., Montgomery D.* // Rept. Prog. Phys. 1980. V. 43. P. 547–619.
12. *Waleffe F.* // Phys. Fluids. 1992. V. A4. № 2. P. 350–363.