ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2005, том 400, № 1, с. 1–5

ГЕОФИЗИКА

УДК 550.383

ОЦЕНКА ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ ЖИДКОГО ЯДРА ЗЕМЛИ

© 2005 г. М. Ю. Решетняк

Представлено академиком В.Н. Страховым 05.05.2004 г.

Поступило 05.05.2004 г.

В последнее десятилетие были достигнуты большие успехи в области моделирования процессов динамо [1]. В настоящее время крупномасштабные модели динамо в состоянии "качественно" воспроизводить многие явления: инверсии магнитного поля, спектр вариаций магнитного поля, восточное направление вращения твердого ядра Земли [1, 2]. На повестку дня встал детальный количественный анализ используемых параметров и не менее детальный анализ получаемых результатов. Поскольку на поверхности Земли для наблюдателя доступна лишь крупномасштабная часть спектра магнитного поля (с пространственным разрешением не более 10–14 гармоник в разложении по сферическим функциям и вариации с временными периодами не менее 10 лет), а спектр поля скорости, температуры и магнитного поля может убывать существенно медленнее, чем колмогоровский спектр турбулентности, исследование поведения системы в мелкомасштабной части спектра, также недоступной прямому численному моделированию, является одной из наиболее актуальных задач геодинамо.

Наибольшие трудности в моделировании связаны с решением задачи тепловой конвекции, поскольку диапазон пространственно-временны́х масштабов поля скорости и температуры на много порядков превосходит протяженность спектра магнитного поля в жидком ядре, что следует из соотношения Re, Pe $\gg \mathrm{R}_m$, где число Рейнольдса, Пекле и магнитное число Рейнольдса в жидком ядре Земли: Re ~ ~ 10^9, Pe ~ 10^8, $\mathrm{R}_m \sim 10^3$ [3]. Из асимптотического анализа моделей Буссинеска на пороге конвекции известно [4–6], что быстрое вращение Земли приводит к появлению вытянутых в направлении оси вращения структур (колонок), поперечный масштаб которых уже на пороге тепловой конвекции много меньше масштаба типично используемых сеток. Последнее приводит к появлению численных неустойчивостей. В предлагаемой работе идеи асимптотического анализа использованы при создании каскадных моделей тепловой турбулентности. В работе приведены спектральные характеристики турбулентных полей и оценки значений подсеточной вязкости, используемой в моделях крупномасштабной тепловой конвекции.

Рассмотрим уравнения тепловой конвекции для подогреваемой снизу несжимаемой жидкости ($\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$) в приближении Буссинеска во вращающейся вокруг оси z с угловой скоростью Ω декартовой системе координат. Введя следующие единицы измерения для скорости $\mathbf{V}$, времени t, давления $P\left(\frac{\kappa}{L}, \frac{L^2}{\kappa}\right)$ и $2\Omega\rho\kappa$, где L – единица длины, κ – коэффициент молекулярной теплопроводности, ρ – плотность вещества, запишем уравнения в виде

$$\mathrm{EPr}^{-1}\left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}\right] = \\ = -\nabla P - \mathbf{1}_z \times \mathbf{V} + \mathrm{Ra}Tz\mathbf{1}_z + \mathrm{E}\Delta\mathbf{V}, \qquad (1)$$
$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)(T + T_0) = \Delta T,$$

где T – возмущение температуры относительно равновесного распределения температуры $T_0(z) = 1 - z$. Безразмерные числа Прандтля, Экмана и Рэлея заданы в виде $\mathrm{Pr} = \frac{\kappa}{\nu}$, $\mathrm{E} = \frac{\nu}{2\Omega L^2}$, $\mathrm{Ra} = \frac{\alpha g_0 \delta T L}{2\Omega\kappa}$, где α – коэффициент объемного расширения, g – ускорение свободного падения, δT – единица температуры. Следуя [4], исключим давление из (1), применив операции ротор и ротор–ротор к уравнению Навье–Стокса и отбросив нелинейные члены, малые на пороге генерации, получим

$$\mathrm{EPr}^{-1}\frac{\partial \nabla^2 V_z}{\partial t} = \mathrm{E}\nabla^4 V_z + \mathrm{Ra}\Delta_1 T - \frac{\partial \Xi}{\partial z},$$
$$\mathrm{EPr}^{-1}\frac{\partial \Xi}{\partial t} = \mathrm{E}\nabla^2\Xi + \frac{\partial V_z}{\partial z}, \qquad (2)$$
$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)T_0 = \Delta T,$$

Институт физики Земли им. Г.А. Гамбурцева Российской Академии наук, Москва

где $\Xi = \mathrm{rot}_z\mathbf{V}$, $\Delta_1 = \dfrac{\partial}{\partial x^2} + \dfrac{\partial}{\partial y^2}$.

Подстановка $(V_z, \Xi, T) = (v_z, \xi, \theta)e^{i(\omega t + k_x x + k_y y + k_z z)}$ в (2) приводит к

$$\begin{aligned} -\mathrm{E}\mathrm{Pr}^{-1}i\omega k^2 v_z &= \mathrm{E}k^4 v_z - \mathrm{Ra}\theta k^2 - i\xi, \\ \mathrm{E}(\mathrm{Pr}^{-1}i\omega + k^2) &= i v_z, \\ (i\omega + k^2)\theta &= v_z, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\sqrt{2}\,k = k_x = k_y \gg k_z \sim 1$, а из условия бездивергентности $v_i k_i = 0$ следует, что $v_x \simeq -v_y$. В матричной форме (3) имеет вид $\mathbf{A}\cdot(v^z, \xi, \theta)^T = 0$, где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\mathrm{E}(i\mathrm{Pr}^{-1}\omega + k^2) & \dfrac{i}{k^2} & \mathrm{Ra} \\ -i & \mathrm{E}(i\mathrm{Pr}^{-1}\omega + k^2) & 0 \\ -1 & 0 & i\omega + k^2 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Условие разрешимости ($\mathrm{Det}\mathbf{A} = 0$) дает

$$\omega_{1,2,3} = 0,$$

$$\pm \mathrm{Pr}^{1/2}k^{-1}\mathrm{E}^{-1}(-\mathrm{E}\mathrm{Ra}k^2 + 2\mathrm{E}^2k^6 + \mathrm{E}^2k^6\mathrm{Pr} + \mathrm{Pr})^{1/2},$$

$$\mathrm{Ra}_1 = \frac{\mathrm{E}^2k^6 + 1}{\mathrm{E}k^2}.$$

Из условия $\dfrac{d\mathrm{Ra}_1}{dk} = 0$ имеем

$$k_1^{\mathrm{cr}} = 2^{-1/6}\mathrm{E}^{-1/3}, \quad \mathrm{Ra}_1^{\mathrm{cr}} = 3\cdot 2^{-2/3}\mathrm{E}^{-1/3}.$$

Аналогично

$$\mathrm{Ra}_2 = 2\frac{\mathrm{E}^2k^6(\mathrm{Pr}+1)^2 + \mathrm{Pr}^2}{\mathrm{E}k^2(\mathrm{Pr}+1)}, \quad k_2^{\mathrm{cr}} = 2^{-1/6}\left(\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}+1}\right)^{1/3}\mathrm{E}^{-1/3},$$

$$\mathrm{Ra}_2^{\mathrm{cr}} = 3\cdot 2^{1/3}\mathrm{Pr}^{4/3}(\mathrm{Pr}+1)^{-1/3}\mathrm{E}^{-1/3},$$

$$\omega_2^{\mathrm{cr}} = 2^{-1/3}\left(\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}+1}\right)^{2/3}(2 - 3\mathrm{Pr}^2)^{1/2}\mathrm{E}^{-2/3}$$

(условие $\dfrac{d\mathrm{Ra}_3}{dk} = 0$ дает те же результаты). Как видно из приведенного анализа, при $\mathrm{E} \to 0$ (в жидком ядре Земли $\mathrm{E}^{\mathrm{Earth}} \sim 10^{-14}$, $\mathrm{Pr} \sim 10^{-1}$), на пороге генерации отношение продольного и поперечного масштабов составляет $\sim\mathrm{E}^{-1/3}$, что является большой трудностью для прямого численного моделирования. Так, после исключения эффектов супервязкости в модели [7] удалось провести расчеты лишь для $\mathrm{E} \sim 10^{-4}$. С другой стороны, для изучения процессов на малых масштабах могут быть использованы специальные модели турбулентности, в частности, каскадные модели. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений ($i = 0, 1, \ldots, i_{\max}$, $j = 0, 1, \ldots, j_{\max}$), являющуюся обобщением модели (2) на нелинейный случай, записанную в терминах каскадных моделей (см. обзор в [8]):

$$\begin{aligned} 2\mathrm{Pr}^{-1}\mathrm{E}\frac{du_{ij}}{dt} &= 2\mathrm{Pr}^{-1}\mathrm{E}i\Big[\varepsilon k_{xi}\Big(u^*_{i+1j}u^*_{i+2j} - \frac{1}{4}u^*_{i-1j}u^*_{i+1j} - \\ &- \frac{1}{8}u^*_{i-2j}u^*_{i-1j}\Big) + k_{zj}\Big(\frac{1}{2}u^*_{ij-1}w^*_{ij} + 2u^*_{ij+1}w^*_{ij}\Big) - \\ &- \varepsilon k_{xi}\Big(\frac{1}{2}w^*_{i-1j}w^*_{ij} + 2w^*_{i+1j}w^*_{ij}\Big)\Big] - 2\mathrm{E}(k_{xi}^2 + k_{zj}^2)u_{ij} - \frac{u_{ij}}{k_{xi}}, \\ \mathrm{Pr}^{-1}\mathrm{E}\frac{dw_{ij}}{dt} &= \mathrm{Pr}^{-1}\mathrm{E}i\Big[k_{zj}\Big(w^*_{ij+1}w^*_{ij+2} - \frac{1}{4}w^*_{ij-1}w^*_{ij+1} - \\ &- \frac{1}{8}w^*_{ij-2}w^*_{ij-1}\Big) + 2\varepsilon k_{xi}\Big(\frac{1}{2}w^*_{i-1j}u^*_{ij} + 2w^*_{i+1j}u^*_{ij}\Big) - \\ &- 2k_{zj}\Big(\frac{1}{2}u^*_{ij-1}w^*_{ij} + 2u^*_{ij+1}u^*_{ij}\Big)\Big] - \\ &- \mathrm{E}(k_{xi}^2 + k_{zj}^2)w_{ij} - \frac{u_{ij}}{k_{xi}} + \mathrm{Ra}\theta_{ij}, \\ \frac{d\theta_{ij}}{dt} &= ik_{zj}\Big(w^*_{ij+1}\theta^*_{ij+2} + w^*_{ij-1}\theta^*_{ij+1} - \frac{1}{2}w^*_{ij-2}\theta^*_{ij-1} + \\ &+ w^*_{ij+2}\theta^*_{ij+1} - \frac{1}{2}w^*_{ij+1}\theta^*_{ij-1} - \frac{1}{4}w^*_{ij-1}\theta^*_{ij-2}\Big) - \\ &- (k_{xi}^2 + k_{zj}^2)\theta_{ij} + w_{ij}, \end{aligned} \tag{5}$$

где (u_n, w_n) – x- и z-компоненты поля скорости, θ_n – температура в волновом пространстве (k_{xn}, k_{zn}), причем $\xi = i\dfrac{u}{2k}$, звездочка – знак комплексного сопряжения, $k_{n+1} = 2k_n$, $k_0 = 1$. Здесь $\varepsilon \sim \mathrm{E}^{1/3}$ при $u_{ij}k_{xi} \ll w_{ij}k_{zj}$ и $\varepsilon \sim 1$ в противном случае. Аппроксимация отдельных нелинейных членов использована в традиционной для каскадных моделей форме [3, 8–10]. Легко убедиться, что в пределе малых коэффициентов диффузии (и отсутствии силы Архимеда, $\mathrm{Ra} = 0$) система (5) сохраняет кинетическую $E_{\text{к}} = \sum_{ij} 2|u_{ij}|^2 + |w_{ij}|^2$ и тепловую $E_H = \sum_{ij}|\theta_{ij}|^2$ энергии.

Поскольку даже для каскадных моделей турбулентности моделирование процессов с $\mathrm{E}^{\mathrm{Earth}} = 10^{-14}$ является сложной задачей, в работе рассмотрен ряд режимов с $\mathrm{E} > \mathrm{E}^{\mathrm{Earth}}$ и характерным для Земли отношением числа Рэлея к его крити-

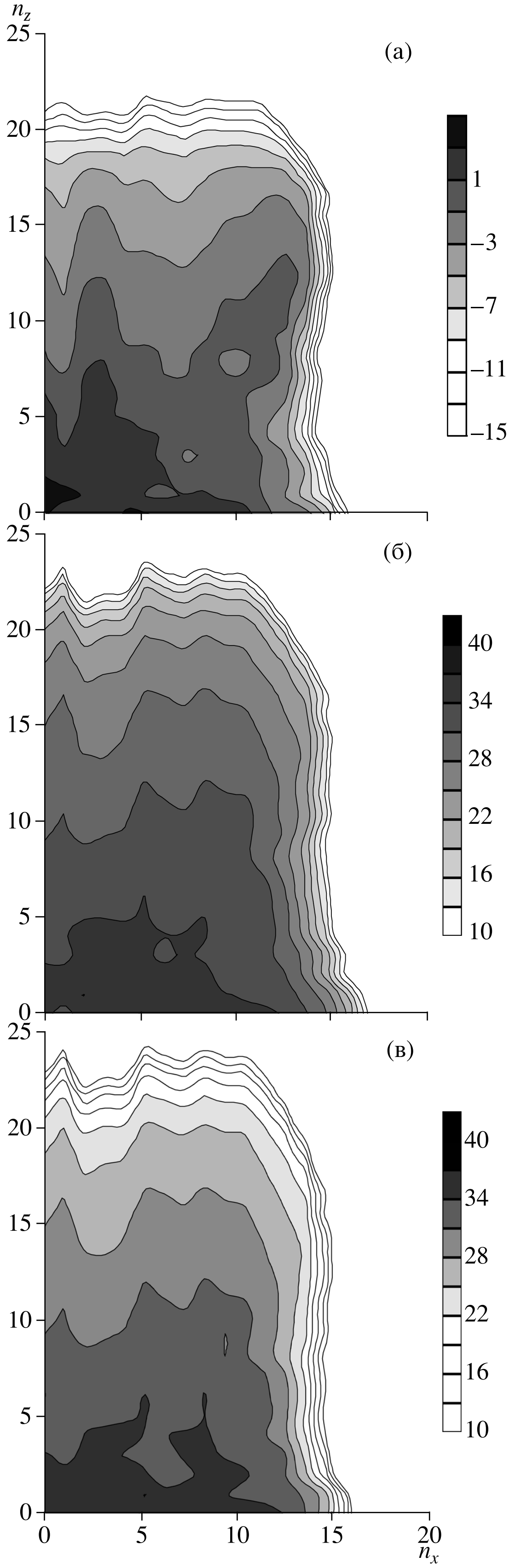

Рис. 1. Двумерные спектры компонент поля скорости $\ln(u_{ij}u_{ij}^*)$ (*а*), $\ln(w_{ij}w_{ij}^*)$ (б) и температуры $\ln(\theta_{ij}\theta_{ij}^*)$ (в).

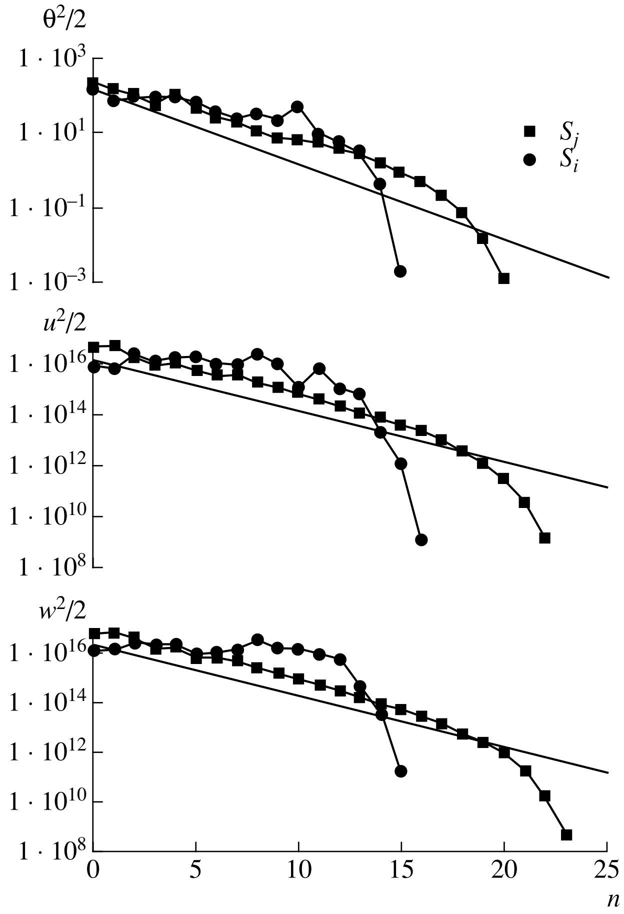

Рис. 2. Продольные (S_j) и поперечные (S_i) спектры компонент поля скорости (u, w) и температуры θ. Прямая линия соответствует спектру Колмогорова "–5/3".

ческому значению $\mathrm{Ra}^{\mathrm{cr}}(\mathrm{E})$: $\mathrm{R} = \dfrac{\mathrm{Ra}}{\mathrm{Ra}^{\mathrm{cr}}} \sim 500$ [11] (т.е. $\mathrm{Pr} = 0.1$, $\mathrm{Ra} = 1.8 \cdot 10^5$, $n_x^{\mathrm{cr}} = \lg_2 k_{xn}^{\mathrm{cr}} = 10$). На рис. 1 представлены спектры полей u, w, θ для $\mathrm{E} = 10^{-10}$. Спектры вытянуты в продольном (вдоль оси z) направлении, что связано с блокированием переноса энергии по спектру вращением в перпендикулярном направлении. В то же время в области максимума для спектров характерно существование интервала поперечных волновых чисел $0 \lesssim n_x \lesssim n_{\mathrm{E}}$, $n_{\mathrm{E}} = \mathrm{E}^{-1/3} \approx 10$, на котором спектр постоянен (расчеты для $\mathrm{E} = 10^{-6}$–10^{-9} дали аналогичные результаты). Эта особенность спектров говорит о сохранении свойств линейной системы (2), для которой наиболее быстро растущая мода соответствует $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_x = n_{\mathrm{E}}, n_y \sim 1$. На рис. 2 представлены одномерные поперечные $S_i(n_x)$ и продольные $S_j(n_z)$ спектры, полученные суммированием исходных двумерных спектров S_{ij} по одному из волновых чисел. В отличие от продольного спектра $S_j(n_z)$, имеющего колмогоровское распределение, амплитуда поперечного спектра $S_i(n_x)$ на малых масштабах $\frac{1}{k_x} \sim l_{\mathrm{E}}$ $\left(l_{\mathrm{E}} = \frac{1}{k_{\mathrm{E}}}\right)$ сравнима со значениями спектра на больших масштабах $\frac{1}{k_x} \sim 1$. Таким образом, оценив кинетическую энергию движений на больших масштабах из магнитных измерений (например, из скорости западного дрейфа магнитного поля или близких по порядку величины вариаций векового поля ~0.2°/год), можно оценить и величину диссипации энергии, сопоставив ее с масштабом l_{E}, недоступны как для наблюдений, так и для прямого моделирования системы (1). Поскольку в z-направлении спектр колмогоровский, то основной вклад в диссипацию будет связан с градиентами полей в перпендикулярных направлениях. Не вдаваясь в тензорную структуру коэффициента турбулентной вязкости ν^{t} (в общем случае ν^{t} тензор 4-го ранга [12]), оценим, каким должен быть по порядку величины ν^{t}, чтобы система (1) давала самосогласованное крупномасштабное решение. В качестве нулевого приближения, рассмотрим изотропную модель Смагоринского [13], согласно которой

$$\nu_0^{\mathrm{t}} = G_S V_l l, \quad V_l = l|G_0|, \quad |G_0| = \sqrt{G_{ij}G_{ij}},$$

где $G_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)$ – тензор вязких напряжений, V_l – амплитуда скорости на масштабе сетки l, $C_S = 0.1$–0.2 – константа Смагоринского (здесь V_l и l записаны в размерном виде). Данная модель хорошо описывает колмогоровскую турбулентность с $V_n \sim V_l k_n^{-1/3}$ и после приведения к безразмерному виду дает

$$\mathrm{E}_0^{\mathrm{t}} \sim \mathrm{E}(1 + \mathrm{Pr}^{-1} V_n k_n^{-1}) \sim \mathrm{E}(1 + \mathrm{Pr}^{-1} V_l k_n^{-4/3}).$$

В направлении z для используемых режимов с $R = 500$ распределение Колмогорова остается в силе, поэтому мы сохраним модель Смагоринского для продольного направления. Для поперечного направления в интервале $n_l \le n_x \le n_{\mathrm{E}}$ имеем $(u, w) = \mathrm{const}$, где $k_l \sim \frac{1}{l}$. Тогда $|G| \sim E^{-1/3}|G_0|$. Запишем диссипационный член так, чтобы E^{t} стоял перед оператором Лапласа: $\mathrm{E}_i^{\mathrm{t}} \nabla_i \nabla_i$, где $\mathrm{E}^{\mathrm{t}} = (\mathrm{E}_x^{\mathrm{t}}, \mathrm{E}_z^{\mathrm{t}})$ уже различно для направлений x и z: $\mathrm{E}^{\mathrm{t}} = (\mathrm{E}\nu_0^{\mathrm{t}}, \mathrm{E}^{2/3}\ \nu_0^{\mathrm{t}})$*, а ν_0^{t} записано в безразмерном виде $\nu_0^{\mathrm{t}} = C_S \mathrm{Pr}^{-1} V_l l$. Отметим, что в сферической системе координат для всех трех направлений (r, ϑ, φ) (с точностью до коэффициентов, зависящих от ϑ) $\mathrm{E}^{\mathrm{t}} \sim \mathrm{E}^{2/3}\nu_0^{\mathrm{t}}$, что было использовано в [14] и позволило провести вычисления в крупномасштабной модели тепловой конвекции для $\mathrm{E} = 10^{14}$. Величина ν_0^{t} зависит как от интенсивности конвекции R, так и от шага используемой сетки l. На пороге конвекции ($R = 1$) и $l \ll l_{\mathrm{E}}$ турбулентная вязкость сглаживает колоноидальные структуры, предсказанные линейным анализом [4, 5]. Нижняя оценка эффективного числа Экмана для Земли в модели с сеткой $l \sim 10^{-2}$, позволяющей разрешить режимы с числом Экмана $\mathrm{E} \sim 10^{-4}$, дает $\mathrm{E}^{\mathrm{t}} \simeq (10^{-4}, 10^{-9})$. Для аппроксимации турбулентного коэффициента теплопроводности κ^{t} в моделях Буссинеска для жидких металлов обычно используют предположение, что турбулентное число Прандтля $\mathrm{Pr}^{\mathrm{t}} = \frac{\nu^{\mathrm{t}}}{\kappa^{\mathrm{t}}} \sim 1$. Тогда коэффициент перед оператором Лапласса в уравнении теплопроводности примет вид $\mathrm{Pr}(\mathrm{E}^{-1/3}\nu_0^{\mathrm{t}}, \nu_0^{\mathrm{t}})$.

Ранее в модели Смагоринского мы молчаливо полагали справедливость гипотезы Прандтля о длине перемешивания: $\nu^{\mathrm{t}} \sim V_l l$. Эту оценку легко получить из следующего безразмерного анализа. Оценим диссипационный масштаб Колмогорова $\sim k_d^{-1}$ из баланса инерционного и диффузионного членов в уравнении Навье–Стокса: $\mathrm{Pr}^{-1} V_d^2 k_d \sim k_d^2 V_s$ или $V_d \sim \mathrm{Pr} k_d$. Считая, что $V_d = V_l \left(\frac{k_d}{k_l}\right)^{-1/3}$, получим $k_d = (\mathrm{Pr}^{-1} V_l k_l^{1/3})^{3/4}$. Скорость энергии диссипации

$$\epsilon = \mathrm{Pr}^{-1} V_d^2 k_d^2 = \mathrm{Pr}^2 k_d^4 = \mathrm{Pr}^{-1} V_l^3 k_l,$$

$$\nu^{\mathrm{t}} = (\epsilon k_l^{-4})^{1/3} = \mathrm{Pr}^{-1/3} V_l l.$$

Пусть для модели колонок на интервале волновых чисел $(k_{x\mathrm{E}}, k_{xd})$ имеется спектр Колмогорова. Тогда получаем уже знакомый нам (с точностью до коэффициента, зависящего от Pr) результат:

$$\epsilon_{\mathrm{E}} = \mathrm{Pr}^{-1} V_{\mathrm{E}}^3 k_{\mathrm{E}}, \quad \nu_l^{\mathrm{t}} = (\epsilon_{\mathrm{E}} k_l^{-4})^{1/3} = \mathrm{Pr}^{-1/3} \mathrm{E}^{-1/3} V_l l,$$

где использовано $V_{\mathrm{E}} \sim V_l$.

В заключение отметим, что учет магнитного поля вносит дополнительную анизотропию [15], что может существенно изменить энергетический баланс системы. Однако для масштабов $l_{\mathrm{E}} < l_{\mathrm{hydr}} < l_m \sim R_{\mathrm{m}}^{-3/4}$, влияние магнитного поля будет пренебрежимо мало и диссипация энергии будет определяться рассмотренной выше моделью.

* Вообще говоря, турбулентная диффузия в направлении оси z может быть и несколько выше (см. рис. 1), но все же существенно меньше, чем в перпендикулярном направлении.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 03–05–64074) и фонда INTAS (грант 03–51–5807).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kono M., Roberts, P.* // Rev. Geophys. 2002. V. 40. P. B1–B46.
2. *Решетняк М.Ю.* // ДАН. 2001. Т. 380. № 5. С. 15–19.
3. *Фрик П.Г., Решетняк М.Ю., Соколов Д.Д.* // ДАН. 2002. V. 387. № 2. С. 253–257.
4. *Roberts P.H.* // Astrophys. J. 1965. V. 141. P. 240–250.
5. *Busse F.H.* // J. Fluid Mech. 1970. V. 44. P. 441–460.
6. *Boubnov B.M., Golitsyn G.S.* Convection in Rotating Fluids. L.: Kluwer Acad. Publ., 1995. P. 231.
7. *Glatzmaier G.A., Roberts P.H.* // Nature. 1995. V. 377. P. 203–209.
8. *Bohr T., Jensen M., Paladin G., Vulpiani A.* Dynamical Systems Approach to Turbulence. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. P. 373.
9. *Гледзер Е.Б.* // ДАН. 1973. Т. 209. С. 1046–1048.
10. *Ложкин С.А., Фрик П.Г.* // Изв. РАН. МЖГ. 1998. V. 6. С. 37–46.
11. *Jones C. A.* // Phil. Trans. Roy Soc. London. 2000. V. A 358. P. 873–897.
12. *Gaite J., Hochberg D., Molina-París C.* // Phys. Rev. E. 2003. V. 67. № 2. P. 026304–026310.
13. *Smagorinsky J.* // Monthly Weather Rev. 1963. V. 91. P. 99–164.
14. *Reshetnyak M., Steffan B.* // Num. Meth. and Program. 2004. V. 5. P. 41–45. http://num-meth.srcc.msu.su.
15. *Braginsky S.I., Meytlis V.P.* // Geophys. and Astrophys. Fluid Dynam. 1991. V. A 55. P. 71–87.