

Российская Академия Наук
Институт физики Земли им. Г. А. Гамбурцева

на правах рукописи

УДК 550.385.3

Максим Юрьевич Решетняк

Моделирование процессов динамо в геофизике

25.00.10 - «Геофизика, геофизические методы поисков полезных ископаемых»

Диссертация на соискание
ученой степени доктора физико-
математических наук

Москва 2003

Оглавление

| | |
|---|-----------|
| Введение | 7 |
| 1 Введение | 7 |
| 1.1 Цель работы и ее актуальность | 7 |
| 1.2 Научная новизна | 10 |
| 1.3 Основные положения, выносимые на защиту | 12 |
| 1.4 Апробация | 13 |
| 1.5 Структура и объем диссертации | 15 |
| 2 Стохастические модели динамо и шкала геомагнитной полярности | 19 |
| 2.1 Некоторые свойства шкалы геомагнитной полярности | 19 |
| 2.1.1 Фрактальность | 20 |
| 2.1.2 Вейвлет-спектры | 32 |
| 2.2 Сравнение с моделями | 37 |
| 2.2.1 Модель Рикитаки | 37 |
| 2.2.2 Модель Броуновского движения | 40 |
| 2.3 Выводы | 41 |
| 3 Динамика средних полей. Почти осесиммет- | |

| | |
|---|------------|
| ричные модели динамо. | 45 |
| 3.1 Представление об α - и ω -эффектах | 46 |
| 3.2 Уравнения $\alpha\omega$ -динамо | 50 |
| 3.3 Результаты моделирования. | 53 |
| 3.3.1 Пространственно-временное поведение без ядра. | 53 |
| 3.3.2 Промежуточная модель с внутренним ядром. | 60 |
| 3.4 Сравнение с наблюдениями и интерпретация | 66 |
| 3.5 Оценка величины α -эффекта | 73 |
| 3.5.1 α -эффект в теории ШКР | 74 |
| 3.5.2 Оценки R_α и R_ω из наблюдательных данных | 77 |
| 3.5.3 Параметры турбулентности в жидком ядре Земли | 81 |
| 3.6 Модель подавления α -эффекта магнитным полем и энергетический баланс планетарного динамо | 82 |
| 3.6.1 Два вида баланса | 85 |
| 3.6.2 Модель подавления α -эффекта | 89 |
| 3.6.3 Приложение к другим планетам | 92 |
| 3.7 Обсуждение | 97 |
| 3.8 Выводы | 98 |
| | |
| 4 Тепловая конвекция и динамо в жидком ядре Земли в приближении Буссинеска | 101 |
| 4.1 Основные уравнения | 103 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 4.2 | 2.5-мерные модели | 106 |
| 4.2.1 | Спектрально-сеточный подход | 107 |
| 4.2.2 | Тесты | 114 |
| 4.2.3 | Задача Стюартсона | 120 |
| 4.2.4 | Полная модель | 133 |
| 4.3 | Трехмерные модели | 143 |
| 4.3.1 | Метод контрольного объема. Схемы Патанкара. | 146 |
| 4.3.2 | Экмановские слои и вращение твер- дого ядра. | 149 |
| 4.3.3 | Трехмерная задача динамо. | 157 |
| 4.4 | Обсуждение | 164 |
| 4.5 | Выводы | 169 |
| 5 | Турбулентные модели динамо | 171 |
| 5.1 | Оценки мелкомасштабных полей | 172 |
| 5.2 | Каскадные модели турбулентности | 174 |
| 5.2.1 | Основные уравнения | 174 |
| 5.2.2 | Параллельные вычисления | 177 |
| 5.2.3 | Результаты моделирования. Турбулент- ные коэффициенты переноса. | 178 |
| 5.3 | Комбинированные модели | 183 |
| 5.3.1 | Крупномасштабные уравнения | 183 |
| 5.3.2 | Мелкомасштабные уравнения и их связь с крупномасштабными | 187 |
| 5.3.3 | Результаты вычислений | 189 |
| 5.4 | Выводы | 196 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 6 | Заключение | 199 |
| 6.1 | Основные положения, выносимые на защиту | 201 |
| | Список публикаций автора | 202 |
| A | Вейвлет-анализ археомагнитных данных за последние 4 000 тысячи лет | 209 |
| B | Спектральный анализ палеомагнитных данных до и после инверсии Матуяма-Харамильо | 225 |
| C | Дрейф фокусов вековой вариации | 245 |
| D | Гармонический анализ палеомагнитных данных | 253 |
| E | Свободные моды затухания уравнения Навье-Стокса | 273 |
| | Литература | 278 |

Глава 1

Введение

1.1 Цель работы и ее актуальность

Идея, высказанная Лармором в 1919 году [1] о том, что наблюдаемое магнитное поле Солнца поддерживается проводящими течениями жидкости, собственно и стала первым толчком в появлении теории динамо. На протяжении прошлого века эта гипотеза трансформировалась в стройную самосогласованную теорию, удачно объясняющую поведение магнитных полей во многих астрофизических объектах: Галактике, Солнце, звездах, планетах и их спутниках [2, 3, 4, 5, 6, 7]. Однако, несмотря на то, что базовые уравнения, описывающие генерацию магнитного поля, были известны еще в первой половине прошлого века (см., например, обзор в [8]), их точное решение для планетарных объектов и по сей день является чрезвычайно трудоемким.

В отличие от многих астрофизических объектов, где роль магнитного поля в формировании конвекции невелика, планетарное динамо характеризуется магнитострофи-

ческим балансом (равенство силы Кориолиса и силы Лоренца), и необходимо решение полной системы уравнений МГД (а не только уравнения генерации магнитного поля), включающей в себя уравнения теплопереноса (и/или переноса легкой и тяжелой примеси), уравнение движения и генерации магнитного поля¹. Данное обстоятельство существенно затрудняет использование аналитических подходов, и одним из перспективных методов является численное моделирование, наиболее часто используемое для изучения процессов геодинamo. Именно этому подходу и будет посвящена в большей мере данная работа.

Из наблюдений известно, что геомагнитное поле демонстрирует сложное и разнообразное поведение в широком диапазоне пространственно-временных масштабов. Поэтому для его изучения требуется использование моделей с разной степенью детализации. Поясним это на простом примере. Так, одна из лучших на настоящее время трехмерных моделей геодинamo Глатцмайера и Робертса (ГР) [9, 10, 11] описывает поля с пространственным масштабом в несколько десятков километров. С другой стороны, времена, на которых возможно произвести такие вычисления, сравнимы с характерным временем процесса, т.е. очень малы. В абсолютных значениях – это всего лишь десятки тысяч лет, в то время как палеомагнитные записи оперируют с миллиардами лет. В то же время, маломодовые модели динамо, например, модель Рикитаки,

¹Отметим для примера, что для Солнца и Галактики энергия магнитного поля сравнима с кинетической энергией течений.

не описывающая пространственное распределение, позволяет получить временные ряды с числом инверсий, намного превосходящим имеющиеся в палеомагнитных записях.

Таким образом, если мы хотим анализировать поведение системы на больших временах, то необходимо пожертвовать пространственным разрешением, трехмерностью и т.д. И наоборот, если нас интересует пространственное распределение, то необходимо сократить временной интервал моделирования. Отдельно стоит вопрос об исследовании МГД турбулентности в жидком ядре Земли. В этом случае требуемая детализация по пространству и времени должна быть существенно выше используемой даже в модели ГР.

Другими словами, если мы ставим своей задачей изучение геомагнитного поля на большом интервале пространственно-временных масштабов, то необходимо использование целого комплекса моделей с различной степенью детализации. По этому принципу и построена диссертация. В ней рассмотрен целый ряд моделей по степени усложнения. Наиболее простые модели позволяют провести анализ геомагнитного поля на временах, сравнимых с геологическими. Более сложные модели позволяют изучать тонкую структуру геомагнитного поля. Необходимо отметить, что изучение простых моделей имеет и отдельный интерес. На основе таких исследований удастся сформулировать ряд методов и подходов, которые в

недалеком будущем могут быть использованы при анализе и более сложных моделей. Хорошим примером тому служит фрактальный и вейвлет-анализы, рассмотренные в диссертации для анализа наблюдательных данных и сравнения с маломодовыми и $\alpha\omega$ -моделями динамо. Как показывает бурный рост вычислительной техники, модели трехмерного динамо в недалеком будущем уже будут в состоянии моделировать большое число инверсий, и на повестку дня встанет вопрос об исследовании статистических свойств инверсий методами фрактального и вейвлет-анализов, использованными ранее для анализа более простых моделей.

1.2 Научная новизна

Автором рассмотрен широкий набор моделей динамо, позволяющих моделирование магнитного поля, тепловой конвекции в жидком ядре Земли с различной степенью детализации. Используемый комплексный подход позволил получить ряд новых результатов, основными из которых мы считаем следующие.

1. Рассмотрены свойства самоподобия шкалы геомагнитной полярности. Показано, что инверсии магнитного поля являются бифрактальным множеством. Даны оценки фрактальной размерности и меры. Представлена классификация моделей динамо исходя из возможности воспроизведения фрактальных последова-

тельностью. Исследованы вейвлет-характеристики шкалы полярности.

2. Впервые приведена оценка амплитуды α -эффекта для жидкого ядра Земли. На примере моделей $\alpha\omega$ -динамо показано, что небольшое изменение интенсивности конвекции может привести к скачкообразному переходу из состояния с частыми инверсиями в режим без инверсий. Результат принципиально не зависит от наличия твердого ядра. Проведены аналогии с солнечным динамо.
3. Предложен сценарий подавления магнитным полем спиральности. В терминах динамики средних полей дано объяснение существования объектов с магнитной энергией много большей кинетической для режимов с быстрым вращением.
4. Создана первая конечно-разностная неосесимметричная модель динамо. Модель позволяет воспроизвести большое число инверсий и получить восточное направление вращения твердого ядра, регистрируемое сейсмологами.
5. Рассмотрена модель МГД турбулентности в жидком ядре Земли в интервале масштабов от тысяч километров до миллиметров. Даны оценки турбулентных коэффициентов переноса.
6. Разработан подход, позволяющий одновременное мо-

делирование крупномасштабных МГД течений и мелкомасштабных, турбулентных течений. В рамках данного подхода появляется возможность охватить очень широкий диапазон пространственно-временных масштабов изучаемых процессов. Его применимость существенно выходит за рамки рассматриваемых геофизических приложений.

Научная и практическая значимость. В работе представлен комплексный подход к изучению процессов геодинамики. Проведенный анализ геомагнитных данных позволил сформулировать ряд новых критериев, которые позволяют сузить диапазон параметров в моделях динамики. Разработанные модели динамики позволяют описать генерацию магнитного поля в широком диапазоне пространственно-временных масштабов. Проведенные исследования имеют комплексный характер и затрагивают ряд смежных вопросов: механизмы тепловой конвекции в жидком ядре Земли, вращение твердого ядра, эффекты МГД турбулентности. Предложенный подход комбинированных моделей динамики может быть применен в различных областях науки и техники.

1.3 Основные положения, выносимые на защиту

1. Оценки фрактальной размерности и вейвлет-характеристик магнитостратиграфической шкалы и подбор

моделей динамо, отвечающих этим оценкам.

2. Определение амплитуд α - и ω -эффектов, величины и знака динамо-числа для жидкого ядра Земли.
3. Предложена модель подавления магнитным полем α -эффекта и механизм установления состояния сверхравнораспределения МГД конвекции с преобладанием магнитной энергии над кинетической.
4. Создание неосесимметричной модели теплового геодинамо со свободно вращающимся твердым ядром.
5. Применение каскадных моделей турбулентности для изучения МГД турбулентности в жидком ядре Земли.
6. Разработка комбинированной модели, включающей в себя модель крупномасштабной конвекции и каскадную модель турбулентности.

1.4 Апробация

Работа неоднократно докладывалась на внутрироссийских и международных семинарах и конференциях: семинаре по архео- и палеомагнетизму лаборатории “Главного Геомагнитного Поля и Петромагнетизма” Института Физики Земли РАН, а также общемосковском коллоквиуме по “Палеомагнетизму и магнетизму горных пород”, семинаре по “Основам космической магнитной гидродинамики” (МГУ), семинаре в ИКИ РАН, в Университете Нью-

Кассела (Англия), проблемном ученом совете Института физики Земли, конференциях “Палеомагнетизм и магнетизм горных пород” (г.Борок, Ярославская обл., 1996, 1997, 1999, 2001), конференции “Внутреннее ядро Земли. Геофизическая информация о процессах в ядре” (Москва, 2000), Всесоюзной Школе Механики Сплошных Сред и семинарах Института Механики Сплошных Сред АН (Пермь, 1997, 1999, 2001), конференции “New Trends in Geomagnetism” (1996, 1998), конференция “Planetary and cosmic dynamos. 5th International Workshop” (Чехия, 1997), конференции по Магнитной Гидродинамике (МАНУД-95, Рига, 1995), Генеральных Ассамблеях Геофизического Общества EGS-1998, IUGG-1999, и IAGA-2001, 9-ой Международной конференции по турбулентности (Саутгемптон, Англия, 2002).

Личный вклад автора. Проводимые исследования являются междисциплинарными и охватывают широкий круг вопросов из различных областей науки: физики, геофизики, математики, вычислительной математики, программирования, параллельных вычислений. Работа проводилась в тесном сотрудничестве с коллегами из Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Чешского геофизического института АН (г. Прага) и Болгарского геофизического института АН (г. София). На протяжении всех лет сотрудничества автор принимал активное участие в проводимых работах и был руководите-

лем многих проектов по теме исследований.

1.5 Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из Введения, четырех глав, Заключения. Ряд вопросов, имеющих отдельное прикладное значение, вынесен в приложения. Общий объем диссертации – 302 страниц, в том числе 70 рисунков, 10 таблиц, список литературы содержит 184 наименования.

В настоящей работе рассматривается ряд моделей динамо по степени их усложнения. Для каждой из моделей, по возможности, приводится детальное сравнение полученных результатов с имеющимися наблюдательными данными. Данное представление полученных результатов позволяет последовательно проследить развитие теории динамо и наиболее комплексно подойти к изучению ряда вопросов.

В главе 2 рассмотрены стохастические свойства различных параметров геомагнитного поля. Приведены оценки фрактальности для шкалы геомагнитной полярности за различные интервалы времени, исследованы вейвлет спектры для ряда характеристик геомагнитного поля. На основе полученной информации о наблюдаемом магнитном поле изучены свойства полей, полученных в моделях Рикитаки и Броуновского движения.

В главе 3 рассмотрена генерация магнитного поля в приближении магнитной гидродинамики средних полей.

Этот подход, имеющий строгое математическое обоснование, позволяет, опираясь на исходные уравнения магнитной гидродинамики, получить различные режимы генерации магнитного поля. Проводится сравнение полученных режимов с аналогичными режимами магнитных полей, наблюдаемых в различные геологические эпохи. Исходя из наблюдательных данных и результатов моделирования, даются оценки величин α - и ω -эффектов, определяющих режим генерации поля в ядре Земли динамо.

В главе 4 рассмотрены модели тепловой конвекции и динамо для жидкого ядра Земли в приближении Буссинеска в неосесимметричном приближении. Рассмотрены два, ранее не использованных в динамо численных метода решения задачи. Исследована роль внутреннего ядра Земли и его влияние на процесс конвекции и генерации магнитного поля.

В главе 5 даны оценки эффектов турбулентности. На примере каскадных моделей турбулентности исследованы спектральные свойства мелкомасштабных полей, даны оценки турбулентных коэффициентов переноса для жидкого ядра Земли. Рассмотрен ряд комбинированных моделей, объединяющих трехмерные модели, описанные в главе 4 и каскадные модели. Данный подход позволяет существенно приблизиться к режиму планетарного динамо (геодинамо). Большинство результатов, описанных в этой главе, получены с использованием параллельных вычислительных систем, основанных на кластерах.

Всего по теме диссертации опубликовано более 60 печатных работ.

Автор выражает огромную признательность Д. Д. Соколову, П.Хейде, П. Г. Фрику за постоянную поддержку и участие в работе, а также А. М. Шукурову за плодотворные обсуждения. Данная работа выполнена в стенах лаборатории “Главного Геомагнитного Поля и Петромагнетизма” Института Физики Земли РАН, сотрудники которой оказали решающее влияние на формирование моего понимания данной проблемы. Я очень благодарен В. И. Багину, К. С. Буракову, С. П. Бурлацкой, А. Н. Диденко, Т. С. Гендлер, И. Е. Начасовой, В. Э. Павлову, Г. Н. Петровой, Д. М. Печерскому, О. В. Пилипенко, Г. Н. Поспеловой. Я хочу поблагодарить своих коллег из других организаций и стран за многочисленные обсуждения результатов работы: А. П. Ануфриева, М. Райнхардта, К.-Х. Рэдлера, С. В. Старченко, Г. Фукса, И. Цупала. Автор выражает искреннюю признательность сотрудникам НИВЦ МГУ за помощь в организации и проведении вычислений на параллельных компьютерах.

Глава 2

Стохастические модели динамо и шкала геомагнитной полярности

В этой главе будут рассмотрены некоторые статистические свойства геомагнитного поля (его фрактальные характеристики, вейвлет-спектры) на больших (геологических) временах и проведено сравнение с рядом моделей динамо, позволяющими генерировать долговременные последовательности.

2.1 Некоторые свойства шкалы геомагнитной полярности

Уникальным количественным источником информации о временной эволюции магнитных полей Земли и других планет является палеомагнитная запись – фиксация в остаточной намагниченности ферромагнитных минералов внешнего магнитного поля во время их кристаллизации. По данным такой палеомагнитной записи строится, например, шкала геомагнитной полярности (ШГП).

ШГП представляет собой чрезвычайно длинный временной ряд (сравнимый по длительности в случае Земли с возрастом самой планеты) наблюдений эволюции крупномасштабного геомагнитного поля. Отметим, что инверсии магнитного поля – наиболее четко определяемые характеристики геомагнитного поля на геологических временах, по сравнению с другими величинами, например, интенсивностью и вариациями поля.

Далее будет рассмотрен набор ШГП, отличающийся длительностью и степенью детализации с точки зрения их фрактальных и вейвлет-свойств, и проведено сравнение их характеристик с рядом моделей динамо.

2.1.1 Фрактальность

На примере ШГП-170 – шкалы для последних 170Ма [12], (см. рисунок 2.1а) известно, что информация, содержащаяся в шкале геомагнитной полярности, является содержательной с точки зрения теории динамо. Последовательность моментов инверсий оказывается непериодической (в строгом значении этого термина), случайной последовательностью [13]. Геометрическую структуру ШГП-170 удастся охарактеризовать количественно: она является фрактальным множеством [14, 15], для которого удастся вычислить фрактальную размерность и меру [15, 16], см. также [17].

Помимо строгого математического обоснования [18], фрактальные множества имеют наглядное геометрическое пред-

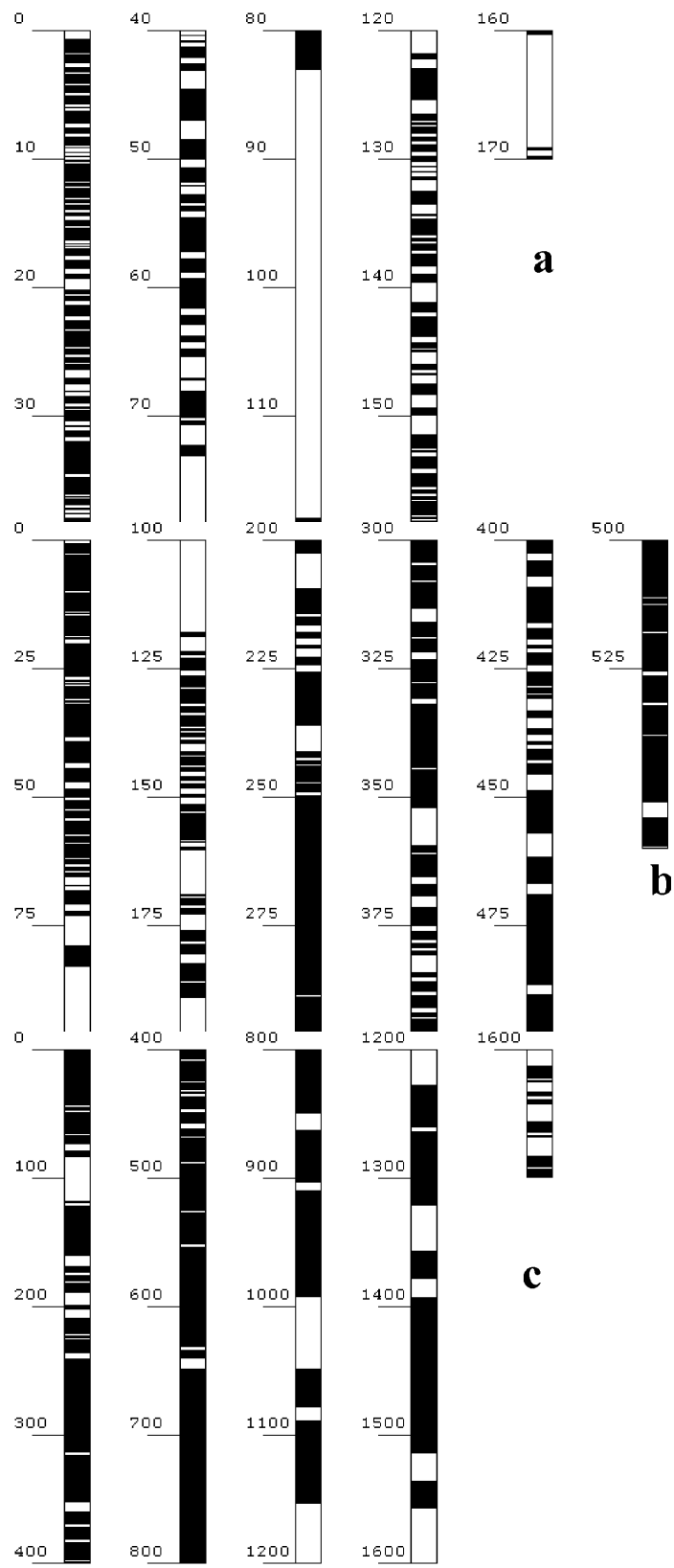


Рис. 2.1: Шкалы геомагнитной полярности за а) 170 (ШГП-170), б) 560 (ШГП-560) и с) 1700 (ШГП-1700) млн. лет.

ставление: это множества, обладающие свойствами самоподобия. Процессы и объекты, обладающие свойствами самоподобия, часто встречаются в природе: турбулентность (облака и течения), форма русел рек и береговой линии, рельеф, кристаллы и полимеры. Отметим, что обратной стороной самоподобия является отсутствие выделенного масштаба. Например, у Колмогоровской турбулентности выделенными являются два масштаба – большой масштаб, где происходит впрыск энергии в систему и диффузионный масштаб, где происходит диссипация энергии. Инерционный же интервал (самоподобный), находится между этими двумя масштабами. Его количественными характеристиками являются фрактальные мера и размерность. Отметим, что вышеупомянутое самоподобие хорошо заметно и при взгляде на рис. 2.1, на котором представлено три ШГП за различные интервалы времени.

Хотя геометрические характеристики ШГП не представляют интереса с точки зрения, например, возрастной корреляции геологических событий, однако они позволяют сравнивать результаты численного моделирования для различных моделей геодинамо с наблюдениями. Так, различные модели геодинамо, например динамо Рикитаци [19, 2], позволяют получить случайную последовательность инверсий геомагнитного поля. Однако очевидно, что нереально ожидать воспроизведения в численном расчете именно той реализации случайной последователь-

ности, которая зафиксирована в шкале геомагнитной полярности. Речь может идти лишь о сопоставлении тех или иных количественных статистических характеристик наблюдаемой и вычисленной шкал. Фрактальные характеристики могут быть полезным инструментом в подобных сопоставлениях [16].

Рассмотрение более длинных ШГП [20] (рис.2.1) дает возможность детального изучения их геометрических и фрактальных свойств. Используемая в данной работе шкала [21], несомненно, имеет определенные недостатки в построении, возможную неполноту в интервалах более древнего времени. Однако мы будем интересоваться глобальными статистическими свойствами шкалы, поэтому можно надеяться, что имеющиеся недостатки и ошибки в ее построении не будут вносить существенного вклада в оценку этих свойств, так что сводная шкала может быть использована для выявления главных закономерностей в поведении геомагнитного поля и для сопоставления с моделями геодинамо.

Характерной особенностью ШГП является существование интервалов постоянной полярности, длительности которых могут отличаться друг от друга более чем на порядок. Можно предположить подобие различных временных масштабов. С большим диапазоном временных масштабов столкнулись исследователи при попытках описать имеющуюся шкалу инверсий каким-либо простым статистическим законом, например, законом Пуассона или рас-

пределением Максвелла [22, 23]. Заведомо, в целом, шкалу нельзя описать в рамках таких распределений с постоянными во времени параметрами. В рамках фрактального подхода, однако, существует возможность¹ описания процесса в большом диапазоне масштабов. (Ниже мы обсудим связь этой интерпретации с моделью Пуассоновского процесса с переменным коэффициентом.) Как было показано в [14, 15, 16, 20], данный подход может быть эффективно использован для анализа магнитостратиграфической шкалы.

Для изучения фрактальных характеристик шкалы геомагнитной полярности длиной T выделим на ней некоторый временной интервал Δ . Пусть $N(\Delta)$ — количество интервалов длиной Δ на промежутке интервала времени T , в которые попадает хотя бы одна инверсия. Рассмотрим для примера следующие предельные случаи. Когда $\Delta \sim T$, то очевидно, $N(\Delta) \sim \Delta^0$. Для очень малых $\Delta \ll T$ и более менее равномерно распределенных инверсий естественно ожидать $N(\Delta) \sim \Delta^{-1}$. В общем случае, когда $\Delta \ll T$ и инверсии распределены неравномерно, возможна более общая форма зависимости:

$$N(\Delta) = M\Delta^{-d}, \quad (2.1)$$

где M — хаусдорфова мера, а d — хаусдорфова размерность. В двойном логарифмическом масштабе ($\ln N, \ln \Delta$) зависимость (2.1) является линейной функцией. Ее угловой коэффициент численно равен размерности Хаусдор-

¹Имеется в виду, что вероятность длительной магнитозоны остается достаточно большой.

фа. Говорят, что временные ряды для которых хаусдорфова размерность d постоянна и принадлежит интервалу $(0 < d < 1)$ на рассматриваемом интервале T , называются фрактальными.

Графики зависимостей $N(\Delta)$ для разных временных интервалов в двойном логарифмическом масштабе представлены на рис. 2.2. На рисунке видны участки пря-

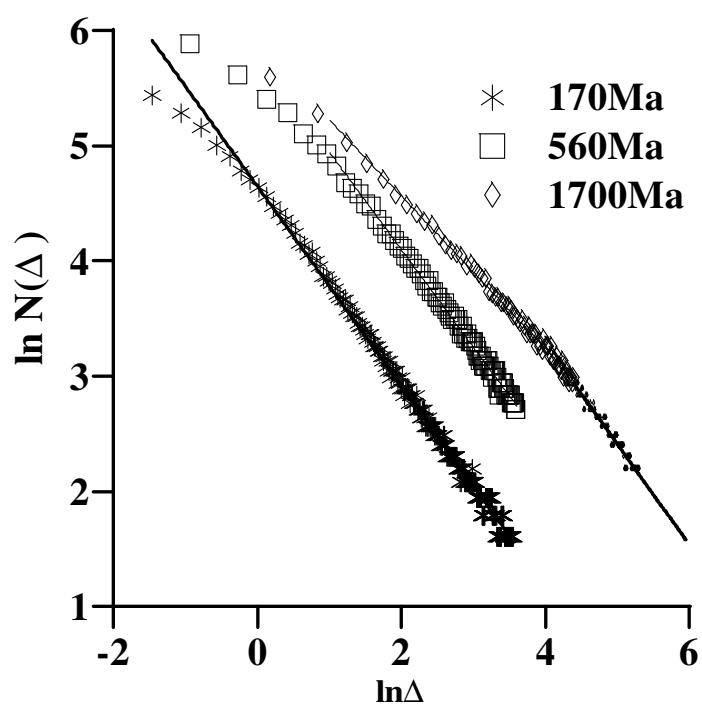


Рис. 2.2: Количество интервалов $N(\Delta)$ длиной Δ в которые попала хотя бы одна инверсия для различных интервалов времени

молинейных зависимостей, соответствующие различным фрактальным размерностям, а также участок слабой за-

зависимости $N(\Delta) \approx \text{const}$ в области малых Δ . Величины параметров M и d приведены в таблице 2.1. Поскольку величина хаусдорфовой меры M зависит от величины рассматриваемого интервала времени T , то для дальнейшего анализа величины хаусдорфовой меры удобно ввести ее нормированное значение, определяемое как: $M_n = M/T^d$. Величина M_n также приведена в таблице 2.1.

Рассмотрим первый наиболее детальный и надежный интервал от 0 до 170Ma (рис. 2.2). На этом графике выделяется один прямолинейный участок с хаусдорфовой размерностью $d \sim 0.87$, а также участок $N(\Delta) \approx \text{const}$. Таким образом, рассматриваемый ряд является фрактальным. Существование небольшого загиба в области малых Δ может свидетельствовать о существовании и другой хаусдорфовой размерности, которая при имеющейся длине ряда не может быть выявлена с большей точностью².

С удлинением интервала до 250Ma (мезозой), где шкала имеет надежность, близкую к первому интервалу, а также для интервала 560Ma (фанерозой), фрактальные характеристики остаются приблизительно теми же (см. рис. 2.2 и таблицу 2.1).

Существование излома для функции $N(\Delta)$ для ШГП-1700 можно объяснить двумя причинами: как существенно меньшей изученностью наблюдательных данных, в частности, большими пропусками, особенно в среднепалеозойской-докембрийской части шкалы, так и существованием

²Отметим, что существование этого загиба может быть связано также с недостатком информации о коротких магнитозонах в древних породах.

Фрактальные характеристики.

| T Ma | M , Ma^d | M_n | d |
|-------------|-----------------|-------|------|
| 0-170 (0) | 110 | 1,2 | 0.88 |
| 0-560 (0) | 249 | 1,6 | 0.83 |
| 0-1700 (0) | 446 | 2,1 | 0.72 |
| 0-1700 (1) | 330 | 2,2 | 0.66 |
| 0-1700 (2) | 899 | 1,4 | 0.87 |

Таблица 2.1: (0) соответствует грубой аппроксимации (без разбиения на два прямолинейных участка) (1-2) соответствует двум участкам “тонкой” аппроксимации.

физического процесса с другой хаусдорфовой размерностью. Для проверки первого предположения представлен следующий тест: отсеяны все интервалы полярности с $\Delta < 1$ млн. лет для интервала $0 - 1700Ma$. Полученный таким образом ряд включает ~ 110 инверсий, что составляет $\approx 20\%$ от общей суммы инверсий. И в этом случае мы наблюдали излом ($d_1 \sim 0.52$, $d_2 \sim 0.88$). Поскольку, очень маловероятно, что в шкале $0 - 1700Ma$ пропуски составляют более 80% , то пропуски в данных не могут быть причиной существования излома функции $N(\Delta)$.

Для проверки второго предположения отобраны сравнительно однородные участки шкалы, где инверсии максимально редки. Это интервалы 73-125, 170-370 и 445-1700 Ma, и соответственно, остальные интервалы, представляющие собой участки преимущественно частых инверсий. Далее был проведен фрактальный анализ отдельно на первом и втором множестве. При этом и в первую, и вторую группы попали участки, как из наиболее надеж-

ной, так и из менее надежной части ШГП. В результате (рис. 2.3) мы наблюдаем излом функции $N(\Delta)$ ($d_1 \sim 0.56$,

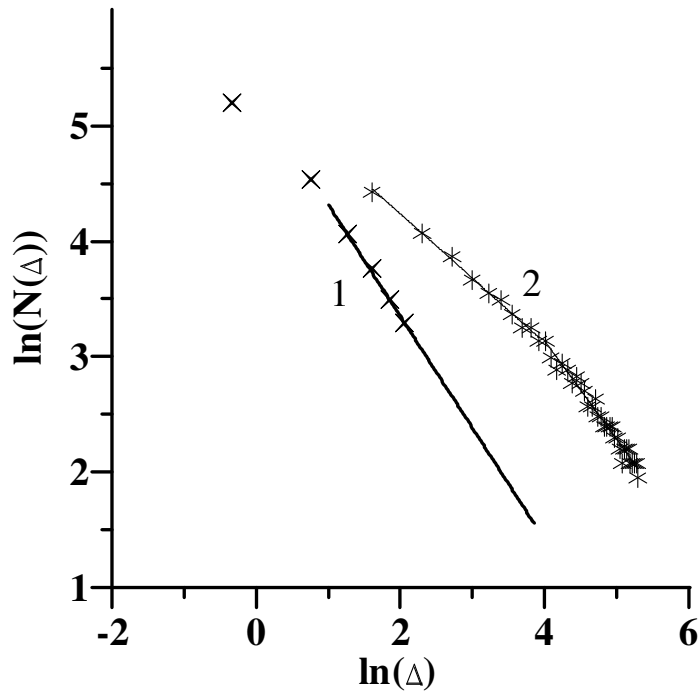


Рис. 2.3: Фрактальный анализ интервалов с частыми и редкими сменами полярности геомагнитного поля: 1 – частые инверсии; 2 – редкие инверсии.

$d_2 \sim 0.86$). Таким образом, у нас нет оснований отождествлять фрактальное множество ($d \sim 0.6$) только с областями частой смены геомагнитной полярности.

Во втором случае (рис. 2.3) мы получили одну прямую линию ($d \sim 0.97$) с небольшим загибом в области $\ln(\Delta) < 1$. Поскольку мы не наблюдаем существование излома зависимости $\ln(N(\ln(\Delta)))$ (рис. 2.3) во втором случае, то мы не можем связать этот излом с длиннопериодной частью ШГП.

Итак, мы наблюдаем существование двух режимов ге-

нерации магнитного поля, выражающихся в наличии двух хаусдорфовых размерностей шкалы инверсий. При этом, излом фрактальных кривых появляется в докембрии, а в фанерозое зависимость остается монофрактальной (рис. 2.2). Другими словами ШГП-1700 представляет собой наложение двух процессов с фрактальными размерностями с $d_1 \sim 0.66$ и $d_2 \sim 0.87$ (см. таблицу 2.1). Мы не рассматриваем здесь третьей возможности существования процесса, связанного с загибом функции $\ln(N(\Delta))$, поскольку этот процесс связан с короткопериодной частью ШГП, которую мы знаем лишь за последние несколько млн. лет (см., например, [24]).

Мы провели еще один дополнительный тест для ШГП, рассматривая ШГП не от настоящего времени, а с момента T_i и до нижней границы $T_b = 1700Ma$. Были построены характеристики $N(\Delta)$ — для $T_1 = 200Ma$, $T_2 = 400Ma$, $T_3 = 600Ma$, $T_4 = 800Ma$, $T_5 = 1000Ma$, $T_6 = 1200Ma$, $T_7 = 1400Ma$, приведенные на рис. 2.4. Мы не наблюдаем каких-либо резких переходов от одной кривой к другой, а лишь их плавное искривление при увеличении длины ряда. Таким образом появление новой хаусдорфовой размерности с $d \approx 1$, “размазано” во времени, т.е. мы не можем определить в рамках фрактального подхода точное начало этого процесса, а можем наблюдать его уже лишь после достаточно большого количества инверсий.

Фрактальной размерности можно дать и иную интер-

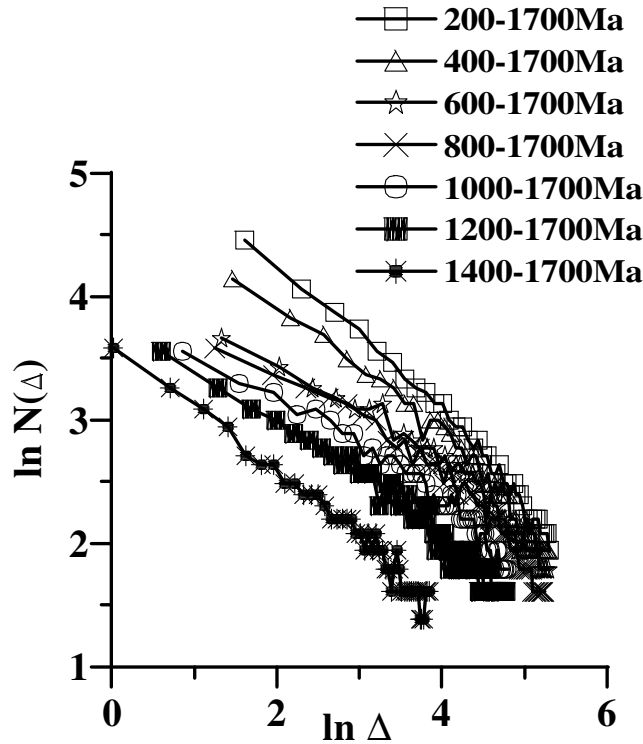


Рис. 2.4: Переход от однофрактального к бифрактальному состоянию для различных интервалов времени.

претацию, интересную с точки зрения рассмотрения вероятностных характеристик временного ряда инверсий. Оказывается [18], что каждому фрактальному временно-му ряду можно сопоставить так называемый показатель Херста H , численно равный фрактальной размерности. Если $0.5 < H < 1$, то после совершения какого-либо события, вероятность совершения этого события повышается. И наоборот, большие пропуски событий стимулируют отсутствие событий и в будущем. В случае $0 < H < 0.5$

дело обстоит наоборот – пропуски стимулируют событие, события – пропуски. В последнем случае события распределяются менее равномерно.

Поскольку для рассматриваемых ШГП показатель Херста $0.6 < H < 1$, является величиной меньшей 1, то мы наблюдаем на магнитостратиграфической шкале области скопления частых смен полярностей геомагнитного поля, а также весьма продолжительные зоны редких инверсий. Отметим, что при $H \ll 1$ инверсий и вовсе могло бы не быть в силу больших временных интервалов между ними. В случае же $d = 1$, происходящий процесс хотя уже и не является фрактальным, все же может иметь продолжительные пропуски в значительно большей степени, чем, например, процесс, распределенный по закону Пуассона. Действительно, плотность вероятности $P(\Delta)$ появления инверсии в течение времени Δ в случае вырожденного фрактального случая (с $d = 1$) равна $P(\Delta) \sim \Delta^{-1}$, а для закона Пуассона - $P(\Delta) \sim e^{-\Delta}$.

В этой связи появление новой хаусдорфовой размерности находит следующее объяснение. Пусть в первом приближении на интервале времени $0 - 560Ma$ распределение инверсий описывается монофрактальным процессом с $d \sim 0.87$. Этот интервал времени характеризуется относительно частыми сменами полярности геомагнитного поля по сравнению с докембрием. Добавление докембрийской части ШГП существенно меняет картину. В результате такого добавления мы получаем области отно-

сительно высокой концентрации числа инверсий (грубо – фанерозой) и разреженные области с малым числом инверсий (докембрий). Это по-видимому и приводит к появлению новой хаусдорфовой размерности $d < 1$ (рис. 2.2). Новая хаусдорфова размерность соответствует малым величинам Δ . Кажется однако странным, что прямолинейный участок функции $\ln N(\ln \Delta)$, относящийся к большим масштабам, имеет ту же размерность, что ШГП-170. Это обстоятельство наталкивает на мысль, что в целом ШГП-1700 имеет одну хаусдорфову размерность $d \sim 0.9$, а существование излома можно объяснить пропуском некоторых масштабов. Последнее может быть вызвано как существованием глобальных изменений в развитии Земли, так и малой изученностью данных.

2.1.2 Вейвлет-спектры

Как уже отмечалось выше, фрактальный анализ не отвечает на вопрос об эволюции тех или иных характеристик, а лишь оценивает всю совокупность событий в целом. Отметим, что перестановка местами магнитозон в рассмотренных выше примерах не повлияет на оценки фрактальной меры и размерности на заданном временном интервале. Поэтому для изучения эволюционных свойств необходимы другие методы, чувствительные к подобным перестановкам, например, спектральные. Для этой цели мы рассмотрим вейвлет-анализ, являющийся разновидностью спектральных методов для нестационарных про-

цессов. Отличительной чертой вейвлет-анализа является его чувствительность к выявлению переменных во времени периодичностей и отсутствию кратных гармоник в выделяемых спектрах (см. подробнее пример анализа археомагнитных данных с пропусками в данных, приложение А, и палеомагнитных данных, включающих инверсию Матуяма-Харамильо [25], приложение В).

Обычно, для изучения спектральных свойств геомагнитного поля использовались значения величины напряженности поля и его угловых компонент (наклонение, склонение) (см., например, [26, 24]). Однако, для более ранних периодов времени количество информации о геомагнитном поле уже недостаточно для проведения подобных исследований и необходимо использование других характеристик поля.

Поскольку именно информация о полярности магнитного поля является наиболее надежной, далее будут рассмотрены спектральные свойства сигнала вида $+1 \dots -1$ и исследовано, можно ли исходя из полученной информации (хотя бы иногда), что-то сказать о спектральных свойствах самого поля.

Очевидно, не имеет смысла рассматривать ШГП как отдельную реализацию случайного процесса, а следует изучить ее статистические характеристики. Обычно, для анализа использовалось изменение частоты инверсий во времени (см., например, [13]). Однако, относительно небольшое общее число инверсий (ШГП-170 содержит 295, а

ШГП-1700 – 593 инверсии) при чрезвычайно широком диапазоне длительностей магнитозон делает невозможной сколько-нибудь точную оценку этой функции. Мы покажем, однако, что удастся исследовать скейлинг (масштабную инвариантность) ШГП, простейшим отражением которого является наличие степенного участка в спектре ШГП.

Спектральные свойства частоты инверсий геомагнитного поля можно исследовать с помощью фурье-анализа рис. 2.5а, но его применение к сигналу ШГП осложнено двумя обстоятельствами. Во-первых, процесс инверсий не является ни периодическим, ни даже квазипериодическим. Во-вторых, известен только знак поля, так что ШГП описывается ступенчатой функцией, фурье-спектр которой включает многочисленные кратные гармоники, хорошо видные на рисунке.

Поэтому, далее мы используем для анализа спектральных свойств ШГП вейвлет-анализ, не дающий кратных гармоник и эффективный при исследовании спектральных (скейлинговых) свойств непериодических сигналов (см., например, [27, 28]).

Вейвлет-преобразование временного ряда $f(t)$ определим как

$$w(a, t) = a^{-3/2} \int \psi\left(\frac{t' - t}{a}\right) f(t') dt', \quad (2.2)$$

где a – параметр масштаба, а $\psi(t)$ – анализирующий вейвлет, выбор которого зависит от решаемой задачи. В дан-

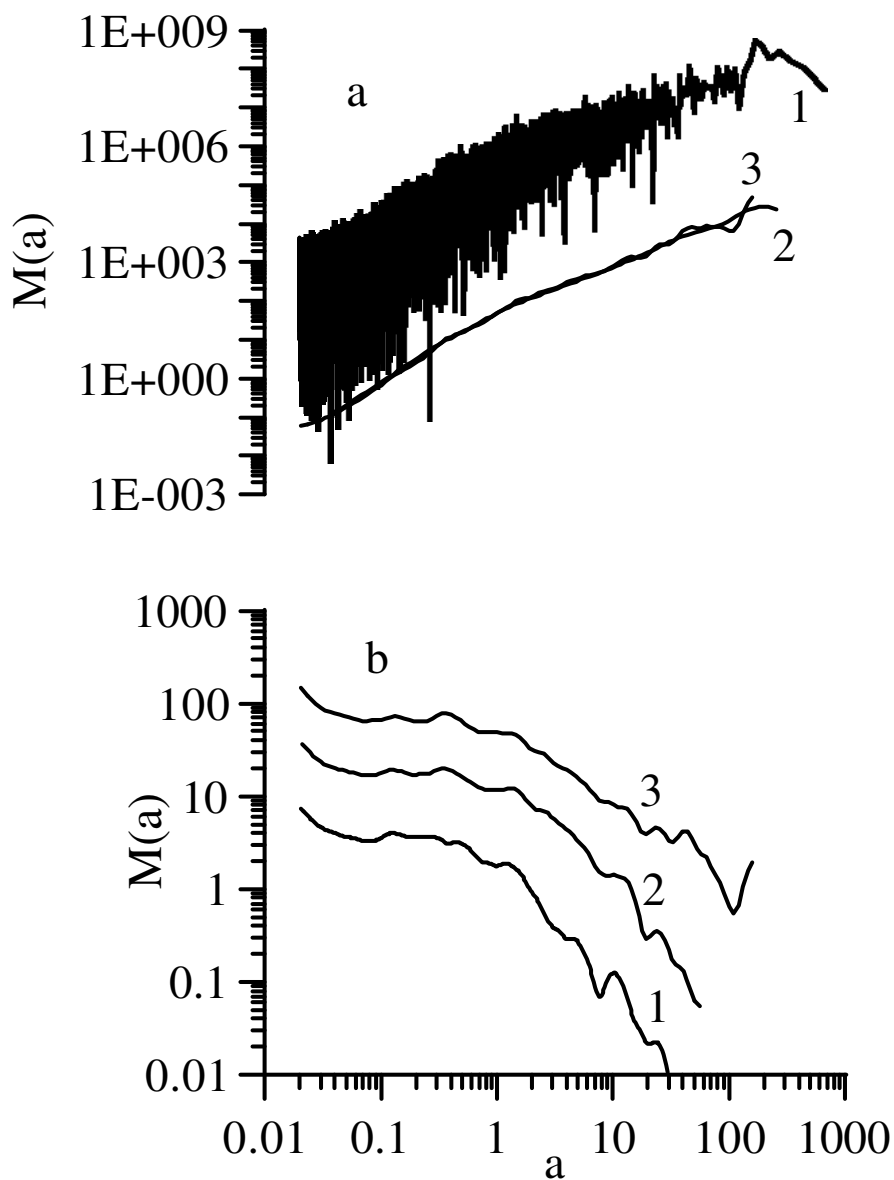


Рис. 2.5: а) Фурье-спектр ШГП-1700 (1) и вейвлет-спектр, полученные с помощью вейвлета Морле (2) и вейвлета мексиканская шляпа (3) с нормировкой, принятой для фурье-спектров; фурье спектр искусственно сдвинут относительно вейвлет-спектров; б) вейвлет-спектр (Морле) для ШГП-170 - 1, ШГП-560 - 2 и ШГП-1700 - 3 с нормировкой, отражающей число магнитозон заданной длительности; a – характерный временной масштаб в млн. лет.

ной работе, в основном, использовался вейвлет Морле $\psi(t) = e^{-t^2/2}e^{2\pi it}$, имеющий хорошее спектральное разрешение. Для анализа спектральных характеристик сигнала вводится вейвлет-спектр $M(a) = T^{-1} \int |w(a, t)|^2 dt$, где T – общая длина сигнала, а спектр нормирован таким образом, что равным значениям $M(a)$ для разных a соответствует равное число осцилляций с соответствующими временными масштабами (нормировка гистограмм).

На рис. 2.5а приведен фурье-спектр ШГП-1700 и вейвлет-спектры этой же шкалы, вычисленные с помощью вейвлета Морле и вейвлета, называемого мексиканской шляпой ($\psi(t) = (1 - t^2)e^{-t^2/2}$), отнормированные так же, как и фурье-спектр. В отличие от графика спектра Фурье, вейвлет-спектры являются более гладкими. Поскольку далее нас будет интересовать именно частота инверсий, то удобнее использовать так называемую гистограммную нормировку, приведенную на рис. 2.5б (см. подробнее об использовании различных нормировок в [29]).

Во всех спектрах виден излом в области $T \approx 1.2$ млн. лет, отмечавшийся также и при фрактальном анализе в подразделе 2.1.1 и [20]. При $a > 1.2$ млн. лет спектр ШГП-1700 можно аппроксимировать степенным законом $M \sim T^{-\mu}$ с показателем $\mu \approx 0.9$. На фоне спадающего спектра выделяются дискретные пики: $T_1 \approx 12$ млн. лет, $T_2 \approx 23$ млн. лет и $T_3 \approx 43$ млн. лет. Указанные характерные времена отмечались в литературе (подробнее см. обзор [30]). Однако, при рассмотрении спектров более

коротких шкал более выраженными становятся пики, соответствующие меньшим длительностям магнитозон. Это позволяет утверждать, что эти пики не свидетельствуют о периодической составляющей сигнала, а характеризуют времена релаксации системы.

2.2 Сравнение с моделями

Как уже отмечалось выше, при сравнении описанных в разделе 2.1 наблюдательных результатов с имеющимися на сегодняшний день моделями имеет смысл говорить не о временной корреляции определенных временных событий, а о воспроизведении статистических свойств геомагнитного поля. Поскольку для наших целей интересны модели, которые способны воспроизводить временные ряды на геологических масштабах (сотни миллионов лет), что много больше характерных диффузионных времен геодинамо ($10^4 \div 10^5$ лет)³, то мы начнем сравнение с наиболее простых моделей, позволяющих длинновременное моделирование.

2.2.1 Модель Рикитаки

Одной из первых работ, позволяющих воспроизвести некоторые случайные черты геомагнитного поля, была модель

³Данный разброс значений τ вызван неопределенностью коэффициента магнитной диффузии η жидкого ядра Земли радиуса L и поправками на турбулентность, а также фактором π^2 в оценке характерного времени диффузии: $\tau \sim L^2/(\pi^2\eta)$ [2].

двухдискового динамо Рикитаки [19], имитирующая генерацию магнитного поля двумя вихрями проводящей жидкости. Модель Рикитаки может быть записана в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\mu x_1 + x_2 x_3 \\ \dot{x}_2 &= -\mu x_2 + x_1 x_4 \\ \dot{x}_3 &= 1 - x_1 x_2 \\ \dot{x}_4 &= 1 - x_1 x_2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

На рис. 2.6 приведен фрагмент сигнала, полученного при численном интегрировании системы Рикитаки, а также соответствующая ему шкала инверсий и интегральные вейвлет-спектры сигнала и шкалы. Отметим специфику сигнала, генерируемого моделью Рикитаки.

Во-первых, амплитуда колебаний варьируется в полтора–два раза, что близко к случаю геомагнитного поля (см. например, [31, 26, 24]).

Во-вторых, сигнал формируется из последовательностей некоторого числа колебаний по одну сторону от оси с приблизительно постоянным периодом T_o . Сравнение с наблюдениями [12] дает $T_o \sim 1$ млн.лет. Спектр инверсий на рисунке 2.6, задаваемый зависимостью:

$$M(a) \approx Ma^{-\gamma}, \quad M = 10^{-3}, \quad \gamma = 2 \quad (2.4)$$

начинается на временах, равных минимальной длительности зоны постоянной полярности T_o и имеет максимум на временах $T_m = 2.3T_o$, соответствующих наиболее вероятной длительности зон.

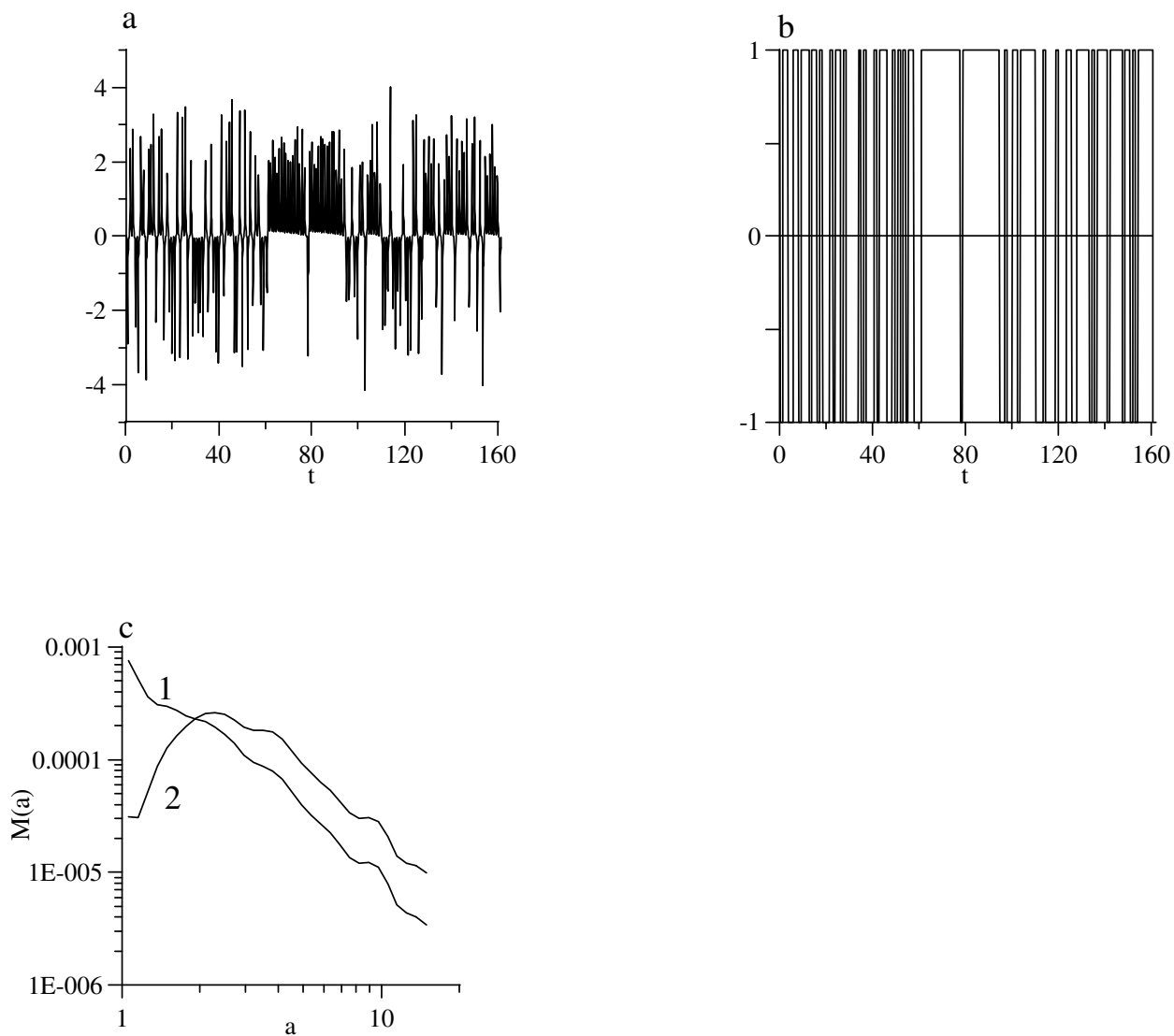


Рис. 2.6: а) сигнал в модели Рикитаки ($\mu = 1$); б) шкала инверсий в модели Рикитаки; в) вейвлет-спектры сигнала (1) и шкалы инверсий (2).

В третьих, на временах, превосходящих T_m , спектр инверсий с точностью до постоянного множителя повторяет спектр самого сигнала. Очевидно, что спектр самого сигнала отражает и его тонкую структуру (на временах $t < T_o$), которая не может присутствовать в спектре шкалы инверсий. Важно отметить, что продолжительность магнитозон постоянной полярности находится в достаточно ограниченном диапазоне, в то время как сами расчеты были проведены на временных масштабах в диапазоне $10^{-3} \div 10^3$ млн.лет. Наличие степенной зависимости (2.4) означает, что множество точек инверсий в системе Рикитаки не является фрактальным. Отметим, однако, что для модели Рикитаки вероятность длительности магнитозон с увеличением характерного времени a в (2.4) убывает медленней Пуассоновского закона (где зависимость экспоненциальная), предложенного для описания распределения инверсий в [23].

2.2.2 Модель Броуновского движения

Другой рассмотренный пример относится к сигналу, шкала инверсий которого обладает значительно более выраженными фрактальными свойствами, чем у реальной ШГП. В качестве такого примера использовался сигнал, генерируемый моделью случайных блужданий. Отметим, что винеровский процесс (см., например, [32]) не содержит никакого характерного масштаба времени и в этом случае не приходится ожидать разделения спектра на низкочастот-

ную и высокочастотную части. Реализация винеровского процесса и его ШГП, а также спектр поля и шкалы инверсий приведены на рис. 2.7. Действительно, спектр исходного сигнала и его шкалы инверсий существенно различаются во всех масштабах: спектр самого сигнала плоский ($\gamma \sim 0.03$), а спектр его шкалы инверсий – убывающий, с показателем $\gamma = 0.52$.

Напомним, что фрактальная размерность множества точек инверсий для такого сигнала $d = 0.5$ [33], а для размерностей $d < 1$ показатель спектра γ в выбранной нормировке совпадает с d .

Таким образом, рассмотренные модели Рикитаки и броуновского движения позволяют надеяться, что низкочастотная часть спектра ШГП, для которой получен степенной закон с показателем $\gamma = 0.9$, правильно отражает структуру временного спектра магнитного поля Земли. Более осторожная точка зрения состоит в том, что полученное значение γ является нижней оценкой наклона спектра самого палеомагнитного поля Земли.

Мы вернемся к свойствам шкалы геомагнитной полярности и возможным способам интерпретации ее свойств с точки зрения динамо средних полей в главе 3.

2.3 Выводы

1. Проведен статистический анализ шкалы геомагнитной полярности за последние 1700 млн.лет. Построе-

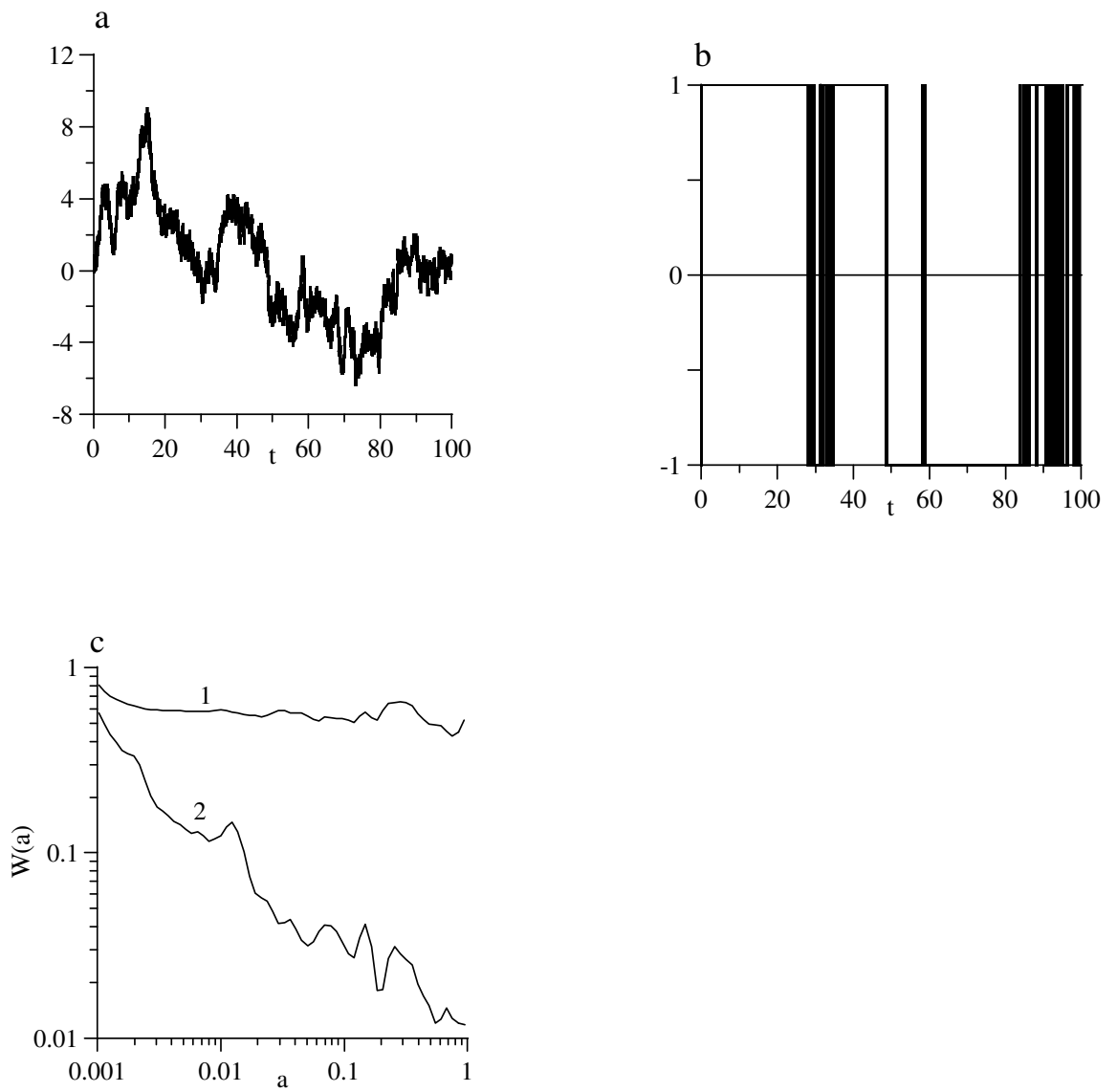


Рис. 2.7: а) реализация винеровского процесса; б) шкала инверсий, соответствующая случайному блужданию; в) вейвлет-спектры сигнала (1) и шкалы инверсий (2).

ны гистограммы частот инверсий. Показано, что шкала геомагнитной полярности является фракталом, а инверсии за рассмотренный интервал времени распределены по степенному закону (2.1). Возможно существование двух режимов генерации, характеризуемых двумя различными хаусдорфовыми размерностями.

2. Впервые исследован вейвлет-спектр шкалы геомагнитной полярности для сигнала $+1 \dots -1$. Данный сигнал содержит наиболее полную информацию о шкале полярности. Рассмотрена связь фрактальных и вейвлет-характеристик.
3. Рассмотрен ряд маломодовых моделей динамо, позволяющих генерировать временные последовательности в широком диапазоне фрактальных размерностей. Продемонстрировано, что низкочастотная часть вейвлет-спектра ШГП либо совпадает со спектром напряженности магнитного поля Земли, либо дает его нижнюю оценку.

Глава 3

Динамика средних полей. Почти осесимметричные модели динамо.

Идея о том, что мелкомасштабные течения проводящей жидкости могут генерировать крупномасштабное магнитное поле впервые была высказана Паркером [34] для астрофизических объектов и Брагинским [35] для случая Земли. Впоследствии этот феномен, относящийся к разряду синэнергетических, был активно исследован многими авторами [2, 36, 3, 5, 6, 7]. Поскольку конечной целью исследований, обычно, были характеристики крупномасштабного (осредненного) магнитного поля, а генерационные источники, связанные с мелкомасштабными (турбулентными) течениями задавались параметрически, то данный подход получил название динамики средних полей. Наиболее известными и распространенными моделями данного подхода являются модели $\alpha\omega$ -динамо.

В этой главе будут кратко изложены основные представления, используемые в моделях $\alpha\omega$ -динамо, рассмотрен ряд моделей $\alpha\omega$ -динамо, воспроизводящих различ-

ные режимы инверсий геомагнитного поля (без учета и с учетом твердого ядра Земли), даны оценки величины α -эффекта в жидком ядре и рассмотрена модель подавления α -эффекта магнитным полем для быстро вращающихся тел.

3.1 Представление об α - и ω -эффектах

Модели $\alpha\omega$ -динамо позволяют количественно описать процесс динамо с учетом мелкомасштабных течений. Обычно, для простоты вычислений, эти модели рассматриваются в осесимметричном приближении. Для того, чтобы обойти запрет теоремы Каулинга [37], связанный с невозможностью генерации осесимметричного магнитного поля осесимметричными течениями, необходимо введение дополнительных источников в уравнение генерации магнитного поля (уравнение индукции). Отметим, что в первом приближении магнитные поля многих объектов осесимметричны, а из косвенных наблюдений следует, что и течения в первом приближении, также осесимметричны. Так, магнитное поле Земли может быть представлено аксиальным диполем, а течение жидкости ассоциируется с западным дрейфом, который обладает свойствами осевой симметрии. Эти обстоятельства подчеркивают нетривиальность ограничения теоремы Каулинга и необходимость объяснения наблюдаемого осесимметричного магнитного поля.

Основной идеей в моделях $\alpha\omega$ -динамо является представление об α - и ω -эффектах. Можно показать [36], что исходные 3D-уравнения можно записать в осесимметричной форме с использованием дополнительного источника (члена) – α -эффекта. Фактически, в данных моделях генерация осесимметричного поля описывается двумя механизмами: крупномасштабным, сдвиговым течением – ω -эффект и мелкомасштабными (турбулентными) течениями – α -эффект.

Наиболее распространенная форма ω -эффекта – это дифференциальное вращение: $V_\varphi = V_\varphi(s)$, где s – расстояние от оси вращения, а V_φ – азимутальная компонента скорости. Строгий анализ показывает, что ω -эффект способен генерировать лишь тороидальную компоненту поля. Для того, чтобы генерация магнитного поля была возможна¹, необходим механизм, генерирующий полоидальную компоненту магнитного поля. С этой ролью выступает α -эффект. Впервые возможность генерации мелкомасштабными течениями крупномасштабного магнитного поля была рассмотрена Паркером [4]. α -эффект позволяет генерировать как полоидальную компоненту ($\alpha\omega$ -динамо), так и тороидальную компоненту ($\alpha^2\omega$ -, α^2 -динамо). В последнем случае обе компоненты (тороидальная и полоидальная) генерируются мелкомасштабными течениями.

Идеи динамики средних полей и их детализации в виде

¹Напомним, что генерация магнитного поля возможна при генерации обеих компонент, тороидальной и полоидальной.

моделей $\alpha\omega$ -динамо успешно использовались для описания многих астрофизических магнитных полей [3, 5, 6, 7].

Отличительной чертой планетарного динамо является принципиальная невозможность прямого наблюдения мелкомасштабных полей на поверхности Земли. Действительно, в приближении непроводящей мантии магнитное поле убывает как $B_l = \left(\frac{R_{Earth}}{R_{core}}\right)^{-l-2} \approx 1.7^{-l-2}$, где R_{Earth} – радиус Земли, R_{core} – радиус жидкого ядра, а $l > 1$ – номер сферической гармоники. Очевидно, что при имеющейся точности воспроизведения магнитного поля и поля скорости на поверхности жидкого ядра, мелкомасштабное магнитное поле (созданное механизмом динамо) практически не наблюдается на поверхности Земли. Поэтому, первая модель геодинамо Брагинского [38, 39], хоть формально и напоминала модель $\alpha\omega$ -динамо, но использовала другие гипотезы, лежащие в основе образования α -эффекта. В ее основе лежала идея о МАК-волнах [40] в жидком ядре Земли, сопоставляемых с археомагнитными колебаниями (см. [31]). МАК-волны вызывают незначительные отклонения поля скорости от осевой симметрии (порядка десяти процентов)². Приближение небольших отклонений полей от осевой симметрии дало название “почти осесимметричные” модели динамо. Брагинским было показано, что столь небольших возмущений достаточно, чтобы при определенных условиях воспроизвести

²Для сравнения отметим, что оценки гидродинамического и магнитного чисел Рейнольдса $Re \approx 10^9$ и $Rm \approx 10^3$ свидетельствует о существовании мелкомасштабных полей (см. подробней главу 5).

устойчивое, близкое к наблюдаемому на Земле, дипольное магнитное поле (Z -модель) без инверсий [38, 39]. Для этой цели α -эффекта был выбран в виде слоя около границы ядро-мантия. Данный выбор α -эффекта диктовался двумя соображениями: 1) устойчивостью численной схемы [39]; 2) способностью воспроизвести дипольное магнитное поле. Поскольку, вообще говоря, решение динамо может существенно зависеть от выбора формы α -эффекта, а на настоящий момент времени не существует строгой теории, позволяющей вычислить его, то необходимо исследовать другие возможные распределения α в пространстве³. Необходимость дальнейших исследований диктуется, также, потребностью создания моделей, позволяющих наблюдать инверсии магнитного поля.

Следующим шагом в развитии моделей $\alpha\omega$ -динамо был учет влияния внутреннего ядра Земли. В работах Холлербача и Джонса [43, 44] было показано, что внутреннее ядро может оказывать стабилизирующее влияние на магнитную гидродинамику. Поскольку характерное диффузионное время для магнитного поля в твердом ядре порядка нескольких тысяч лет, то инверсии магнитного поля не могут происходить быстрее (при условии, если магнитное поле проникает глубоко в твердое ядро). Однако оставалось неясно, возможно ли наличие режимов без наличия твердого ядра, в которых изменение амплитуды α и ω источников может приводить как к режимам

³Отметим, однако работы, показывающие принципиальную возможность генерации α -эффекта отраженными от твердой границы МГД волнами [2, 41, 42]

частых, так и редких инверсий.

Ниже мы рассмотрим модель почти осесимметричного динамо и покажем, что меняя амплитуду α -эффекта, но не меняя его пространственное распределение, можно получить режимы как с частыми инверсиями, так и с полным отсутствием таковых. Данные режимы имеют большое значение для геомагнетизма и могут быть сопоставлены с режимами частых инверсий современного поля и хронами, когда инверсии не наблюдались совсем [12].

3.2 Уравнения $\alpha\omega$ -динамо

Генерация магнитного поля с учетом α -эффекта и крупномасштабная гидродинамика описывается уравнениями магнитной гидродинамики:

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{B}}{Dt} &= (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{V} + \nabla \times (\alpha\mathbf{B} - \eta\nabla \times \mathbf{B}), \\ \rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} &= -\nabla p - 2\rho\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} - \mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{B}/\mu_o + \mathbf{F}^a + \rho\nu\Delta\mathbf{V}, \\ \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где \mathbf{V} , \mathbf{B} – скорость и магнитное поле, t – время, μ_o – магнитная постоянная, p – давление, ρ , ν , η – плотность, вязкость и коэффициент магнитной диффузии, а $\boldsymbol{\Omega}$ и \mathbf{F}^a – угловая скорость вращения Земли и архимедовская сила, соответственно, и α – α -эффект.

Если рассматривать задачу (3.1) для трехмерного, неосесимметричного случая, то это требует достаточно больших компьютерных ресурсов. Поэтому в рамках динамики средних полей, обычно, рассматривают решение задачи, усредненное по азимутальной координате φ в цилиндрической системе координат (s, φ, z) . Осесимметричные решения ищутся в виде:

$$\mathbf{V} = \mathbf{1}_\varphi s \zeta - (\mathbf{1}_\varphi / \mathbf{s}) \times \nabla \chi, \quad \mathbf{B} = \mathbf{1}_\varphi s B - (\mathbf{1}_\varphi / \mathbf{s}) \times \nabla \psi. \quad (3.2)$$

Замечательно, что быстрое вращение Земли позволяет разрешить уравнения гидродинамики в квадратурах. Обычно, в задачах геодинамо пренебрегают инерционными и вязкими членами в уравнении Навье-Стокса (см., например, [39]). Тогда, осреднение (3.1) и переход к безразмерным величинам позволяют получить для ζ , χ , B и ψ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} &= s \nabla \cdot (-\mathbf{V}_p B / s + s^{-2} \nabla s B + \mathbf{B}_p \zeta) \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -\nabla \cdot \mathbf{V}_p \psi + \nabla \cdot (s^2 \nabla s^{-2} \psi) + \alpha s B \\ \chi(s, z) &= -\int_0^z \operatorname{div}(s \mathbf{B}_p B) dz \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\zeta(s, z) = \zeta^c(s, z) - \zeta^c(s, z_1) + \zeta^g(s)$$

$$\zeta^g(s) = \delta_\nu^{-1} [2/s^2] z_1^{1/2} \int_0^{z_1} \operatorname{div}(s \mathbf{B}_p B) dz.$$

Здесь ζ^c представляет собой сумму архимедовской ско-

рости – $\zeta^a = -\int (\nabla \times \mathbf{F}^a)_\varphi dz$ и “магнитной” скорости $\zeta^b = \int (\nabla \times \mathbf{B} \times \mathbf{j})_\varphi dz$, $z_1 = \sqrt{1-s^2}$, и $\delta_\nu = \sqrt{2E}$ – безразмерная толщина Экмановского слоя, число Экмана $E = \nu/2\Omega L^2$ для Земли равно 10^{-15} [45]. Функция α является следствием усреднения малых, неосесимметричных компонент поля скорости. Роль α -эффекта [38, 36] принципиально важна для генерации, так как, согласно теореме Каулинга (см., например, [37]), генерация в чисто осесимметричном случае невозможна. Обе эти величины – архимедовская скорость (ζ^a) и α -эффект вычисляются из решения неосесимметричной задачи, но здесь мы выбираем их в предписанном виде⁴:

$$\zeta^a(r) = -R_\omega r, \tag{3.4}$$

$$\alpha(\theta) = R_\alpha \alpha_0 \cdot \cos \theta,$$

где (r, θ, φ) – сферическая система координат, а R_α, R_ω – амплитуды α и ω эффектов, а пространственные формы α - и ω -эффектов взяты из [46]. Можно показать, что для $\alpha\omega$ -динамо решение зависит не от R_α, R_ω в отдельности, а от их произведения, называемого динамо-числом: $D = R_\alpha \cdot R_\omega$. Поэтому в дальнейшем изложении мы будем классифицировать решения именно по этому параметру.

Граничные условия для магнитного поля на твердых границах внешнего ядра Земли выбираются в обычном виде – непрерывность магнитного поля и тангенциальных компонент электрического поля. Условием для скорости

⁴Модели, позволяющие вычислить α и ω -эффекты, будут рассмотрены в главах 4, 5.

на твердых границах является условие прилипания – равенство нулю относительной скорости на границе.

3.3 Результаты моделирования.

Ниже (в 3.3.1) мы рассмотрим численное решение системы уравнений (3.3) для различных значений D и изучим его пространственно-временные свойства (см. подробнее в [47]). В подразделе 3.3.2 мы рассмотрим упрощенную (“промежуточную”) модель внутреннего ядра и сравним полученные результаты с моделью без ядра.

3.3.1 Пространственно-временное поведение без ядра.

Вычисления проводились при следующих значениях параметров: $R_\alpha \approx 1$, $R_\omega \approx 10^4$, $\delta_\nu = 10^{-4}$. При этих значениях параметров полоидальное поле, экстраполированное к поверхности Земли, будет того же порядка, что и наблюдаемое. Характерные значения амплитуд магнитных полей для обоих случаев приведены в таблице. Результаты расчетов приведены на рис. 3.1. Все приведенные в этой главе расчеты сделаны в приближении дипольной симметрии, поэтому поля, соответствующие нижней полусфере, не приводятся.

Решение представляет собой ряд волновых структур в направлении полярной координаты θ . Как показывают расчеты, с увеличением интенсивности конвекции (амплитуды D) происходит уменьшение пространственного

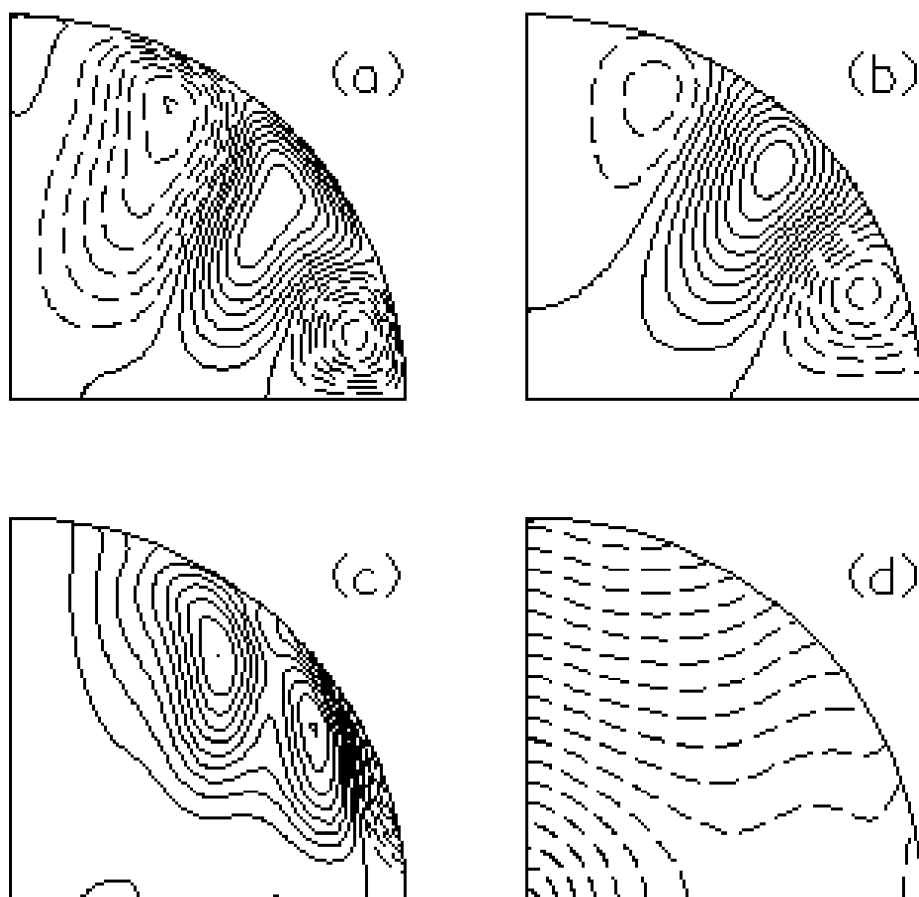


Рис. 3.1: Карты изолиний компонент поля в меридиональном сечении: а – B , б – ψ , с – χ , d – ζ . Сплошные и пунктирные линии соответствуют положительным и отрицательным значениям полей в равномерном масштабе. Средние интегральные значения величин приведены в таблице 3.1.

Амплитуды физических полей.

| R_α, R_ω | B_φ Гс | | B_r Гс | | $T/2$ тыс.лет | |
|----------------------|-------------------|----|-------------|-----|------------------|------|
| | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 9, $9 \cdot 10^4$ | 20 | 20 | 0.6 | 0.8 | 9500 | 9500 |
| 2, $2 \cdot 10^5$ | 40 | 49 | 2 | 3 | 4000 | 3700 |

Таблица 3.1: 1 – без внутреннего ядра, 2 – с внутренним ядром.

масштаба, и количество волн, изображенных на рисунке 3.1, увеличивается.

Характерной особенностью полученного решения является дрейф волн вдоль координаты θ (полярный дрейф)⁵. Поскольку для сравнения генерируемого магнитного поля с наблюдениями интересна информация о нормальной компоненте поля на поверхности жидкого ядра, мы рассмотрим “баттерфляй” диаграммы для B_r -компоненты (рис. 3.2), часто используемые при анализе солнечного динамо [3]. Мы видим, что увеличение амплитуды динамо-числа ($D = R_\alpha \cdot R_\omega$) приводит к появлению областей вблизи полюсов, где несмотря на волновой процесс, полярность магнитного поля, вообще говоря, не меняется. Особенно хорошо это видно при экстраполяции B_r -компоненты на поверхность Земли рис. 3.3. Направление дрейфа – от экватора к полюсам, или наоборот, определяется знаком динамо-числа D . Положительным значениям D соответствует дрейф от экватора к полюсам и наоборот. Отметим, что в отличие от Солнца, где предпочтителен дрейф

⁵В силу осесимметричности задачи дрейф вдоль азимутальной координаты φ рассмотрен быть не может

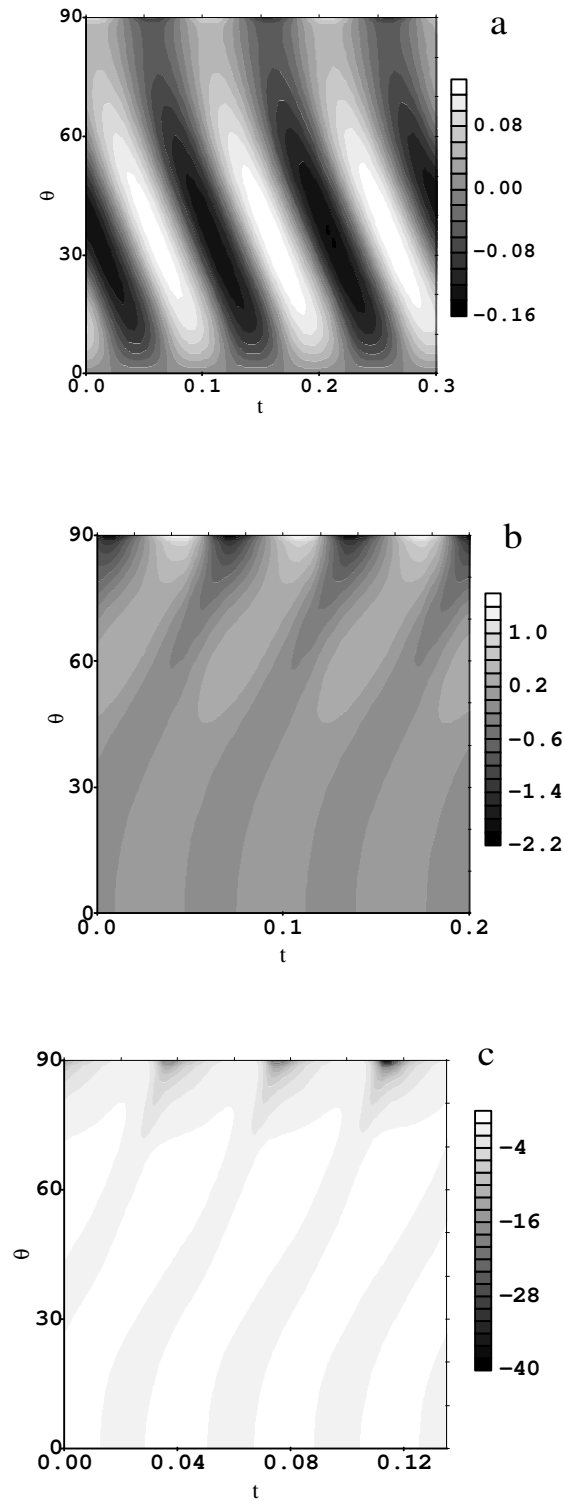


Рис. 3.2: Эволюция во времени (t) B_r компоненты магнитного поля на поверхности жидкого ядра для различных значений R_α , R_ω (D): а) $R_\alpha = 90$, $R_\omega = 90$; б) $R_\alpha = -120$, $R_\omega = 120$; в) $R_\alpha = -180$, $R_\omega = 180$.

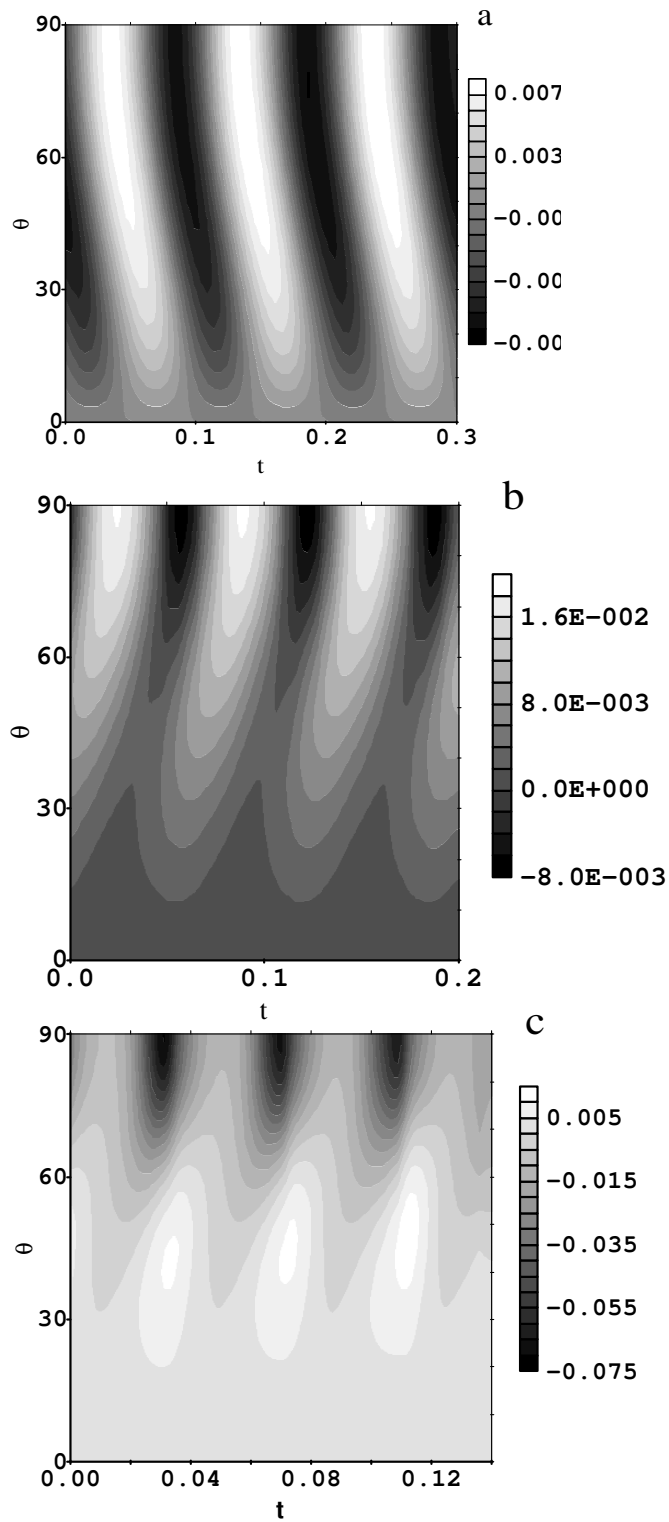


Рис. 3.3: Эволюция во времени (t) B_r компоненты геомагнитного поля на поверхности Земли, соответствующая рис. 3.2.

солнечных пятен, связываемых с выносом тороидально-го магнитного поля на поверхность Солнца, от полюсов к экватору (см., например, [48]), на Земле регистрируется обратное направление дрейфа недипольного магнитного поля – от экватора к полюсам (см. подробнее приложение С)⁶. Данные соображения позволяют выбрать знак динамо-числа D при моделировании [50].

Возможность генерации режимов с постоянной полярностью весьма актуальна для задач геомагнетизма, поскольку в истории земного магнитного поля неоднократно наблюдались периоды, существенно превышающие по длительности характерные диффузионные времена процесса динамо, в течении которых магнитное поле не совершало инверсий. Интересно, что в силу квадратичности силы Лоренца по магнитному полю, уравнения МГД не имеют предпочтительности в полярности. Но задавшись определенными начальными условиями, вообще говоря, возможно находиться в состоянии с той или иной полярностью сколь угодно долго. В качестве иллюстрации приведем поведение байес-фактора (рис. 3.4), определенного как

$$\mathcal{B}(T) = \frac{1}{T} \int_0^T \theta(B(t)) - \theta(-B(t)) dt, \quad (3.5)$$

(здесь $\theta(B)$ равно $+1$ если магнитное поле имеет прямую полярность, и -1 в противоположном случае) (см. по-

⁶Отметим, однако существование наблюдательных данных в пользу дрейфа полоидальной компоненты магнитного поля на Солнце [49] от экватора к полюсам.

дробнее [51]). Обратим внимание, что рассмотренные вы-

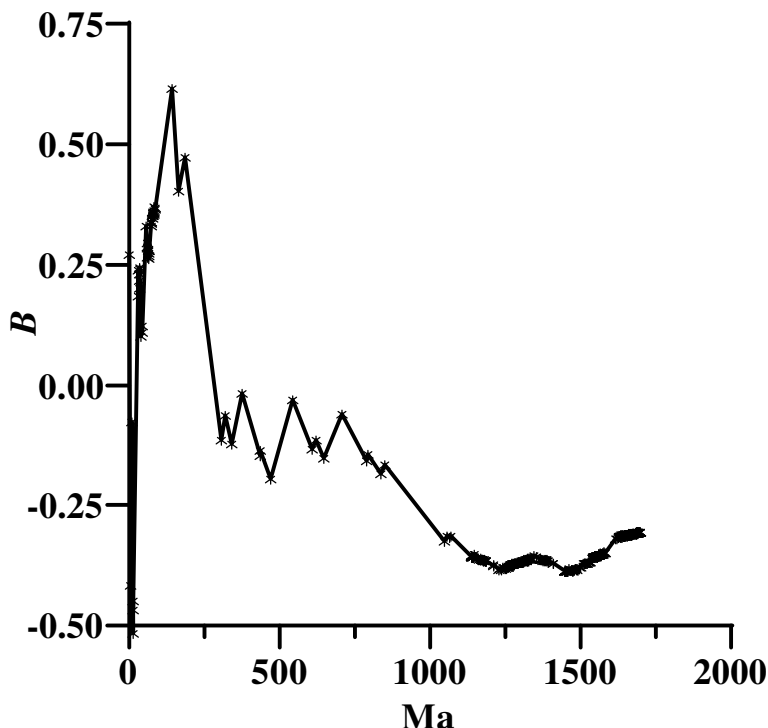


Рис. 3.4: Зависимость байес фактор от времени t (в прошлое).

ше модели позволяют промоделировать режимы с ненулевым байес-фактором.

Для дипольной симметрии первые собственные решения полоидальной и тороидальной компонент имеют вид (см. подробнее [52]):

$$\begin{aligned} a_1 &= 5.44 \int_V P_1^1(\cos(\theta)) j_1(\pi r) \mathbf{B} \, \mathbf{dr}^3 \\ b_1 &= 7.80 \int_V P_2^1(\cos(\theta)) j_2(5.67r) \mathbf{B} \, \mathbf{dr}^3, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где P_l^m – присоединенный полином Лежандра, а j – сферическая функция Бесселя [53]. На рис. 3.5, 3.6, 3.7, 3.8 представлена эволюция во времени первых дипольных ко-

эффицентов в разложении по полоидальным (a_1) и тороидальным (b_1) модам генерируемого магнитного поля.

Генерация магнитного поля есть пороговое явление: если динамо число невелико по абсолютной величине, то магнитное поле затухает. При $|D| = D_{cr}^{\pm} \approx 5\,500$ [46] наблюдаются незатухающие периодические колебания магнитного поля с нулевым средним по времени. При увеличении D ($D > 0$) картина существенно не меняется, колебания остаются периодическими, а величина периода колебаний $\sim D^{1/2}$. Сложнее дело обстоит при отрицательных значениях D . При $D = -14\,000$ возникает колебание магнитного поля с ненулевым значением среднего по времени магнитного момента. Такое поведение характерно для наблюдаемого геомагнитного поля без инверсий. Ниже (см. раздел 3.5) будет показано, что этот диапазон значений динамо чисел не противоречит оценкам динамо числа в работе (см., также [54]).

3.3.2 Промежуточная модель с внутренним ядром.

Детальный анализ процессов динамо с учетом внутреннего ядра требует рассмотрения самосогласованного вращения твердого ядра под действием вязких и магнитных сил и будет приведен в главе 4. Здесь же мы рассмотрим простейшее эммулирование такой ситуации. В первом приближении модель твердого ядра может быть сведена к требованию отсутствия конвекции в области внутреннего

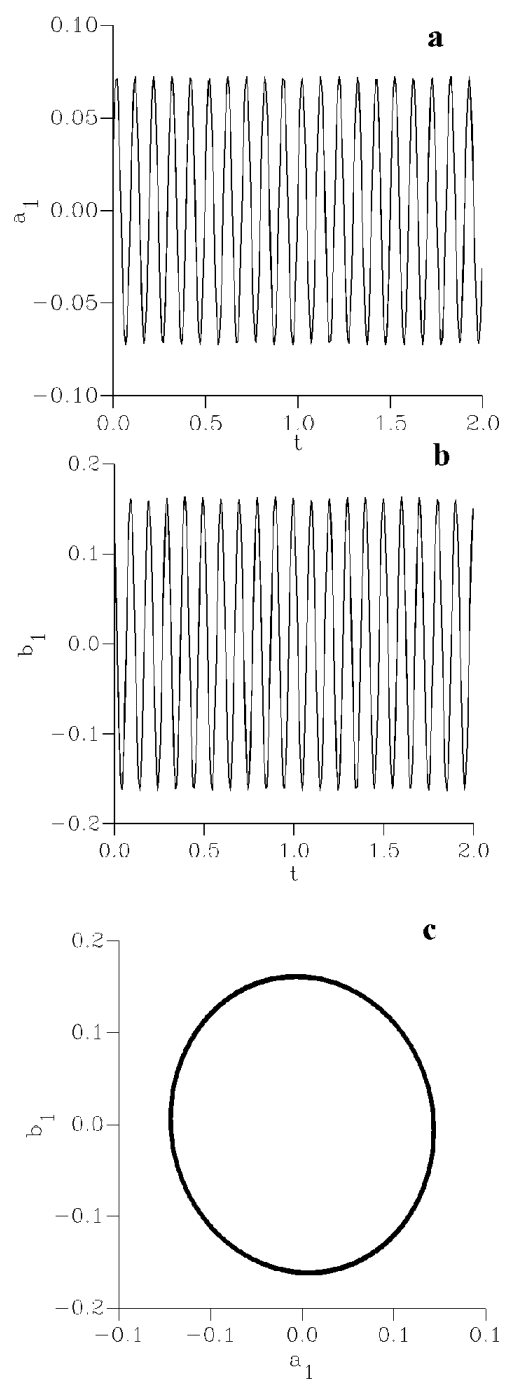


Рис. 3.5: Эволюция а) $a_1(t)$, б) $b_1(t)$ и в) $b(a)$ в модели $\alpha\omega$ -динамо для $R_\alpha = 90$, $R_\omega = 90$.

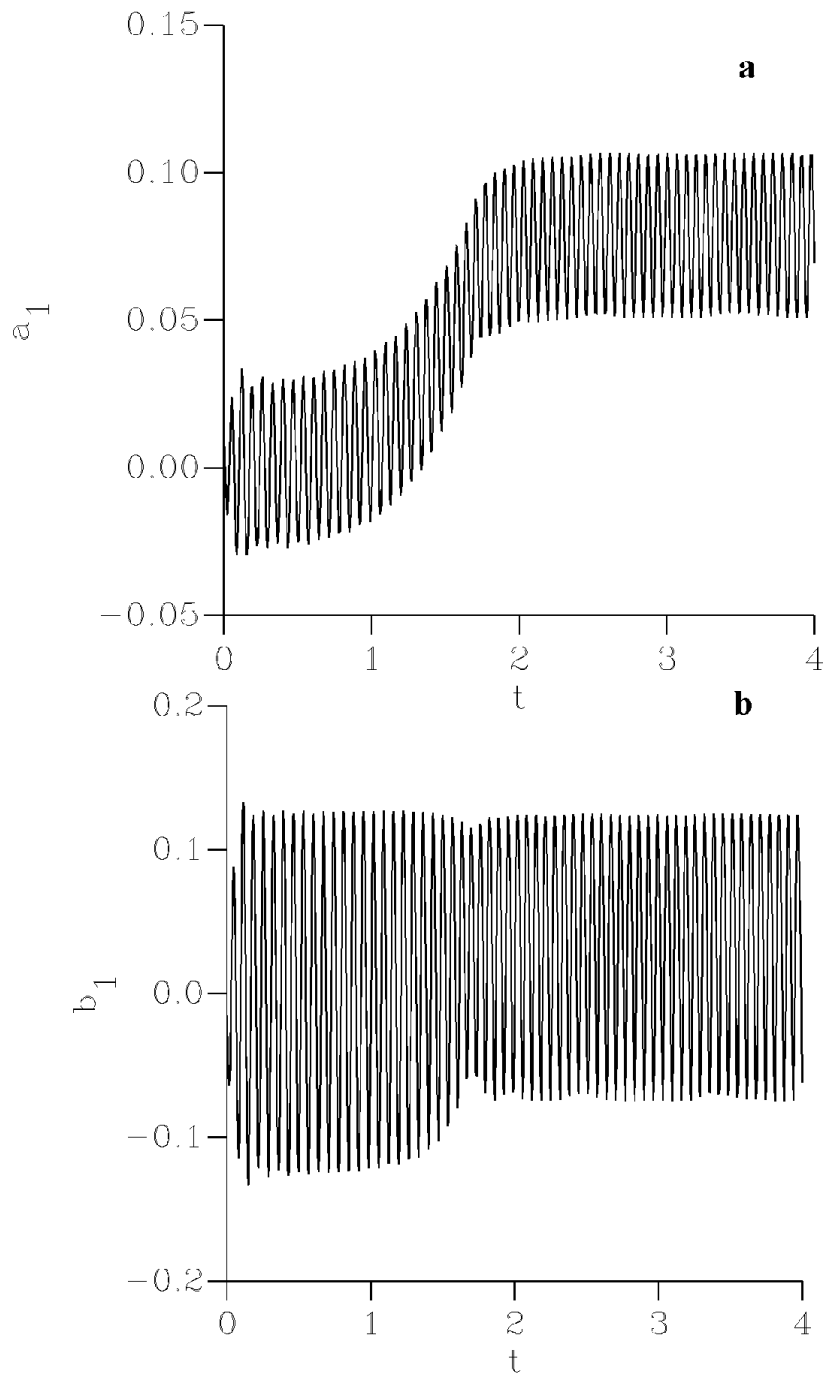


Рис. 3.6: Эволюция а) $a_1(t)$ и б) $b_1(t)$ в модели $\alpha\omega$ -динамо для $R_\alpha = 120$, $R_\omega = -120$.

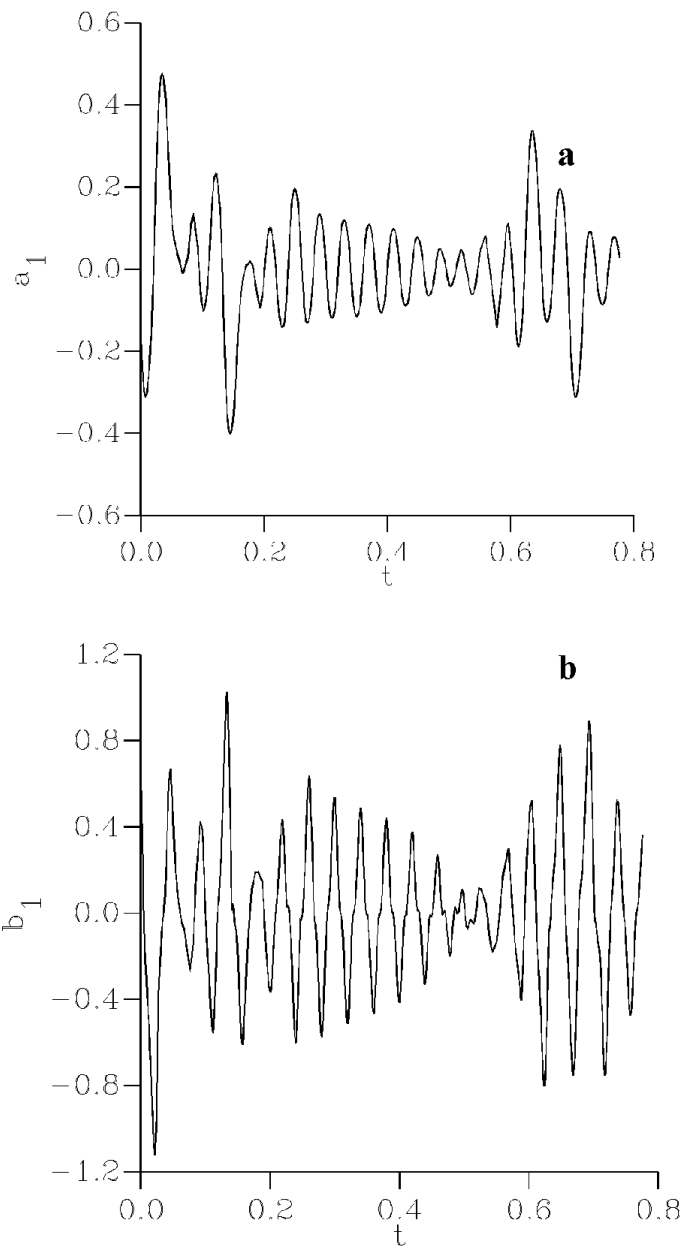


Рис. 3.7: Эволюция а) $a_1(t)$ и б) $b_1(t)$ в модели $\alpha\omega$ -динамо для $R_\alpha = 150$, $R_\omega = -120$.

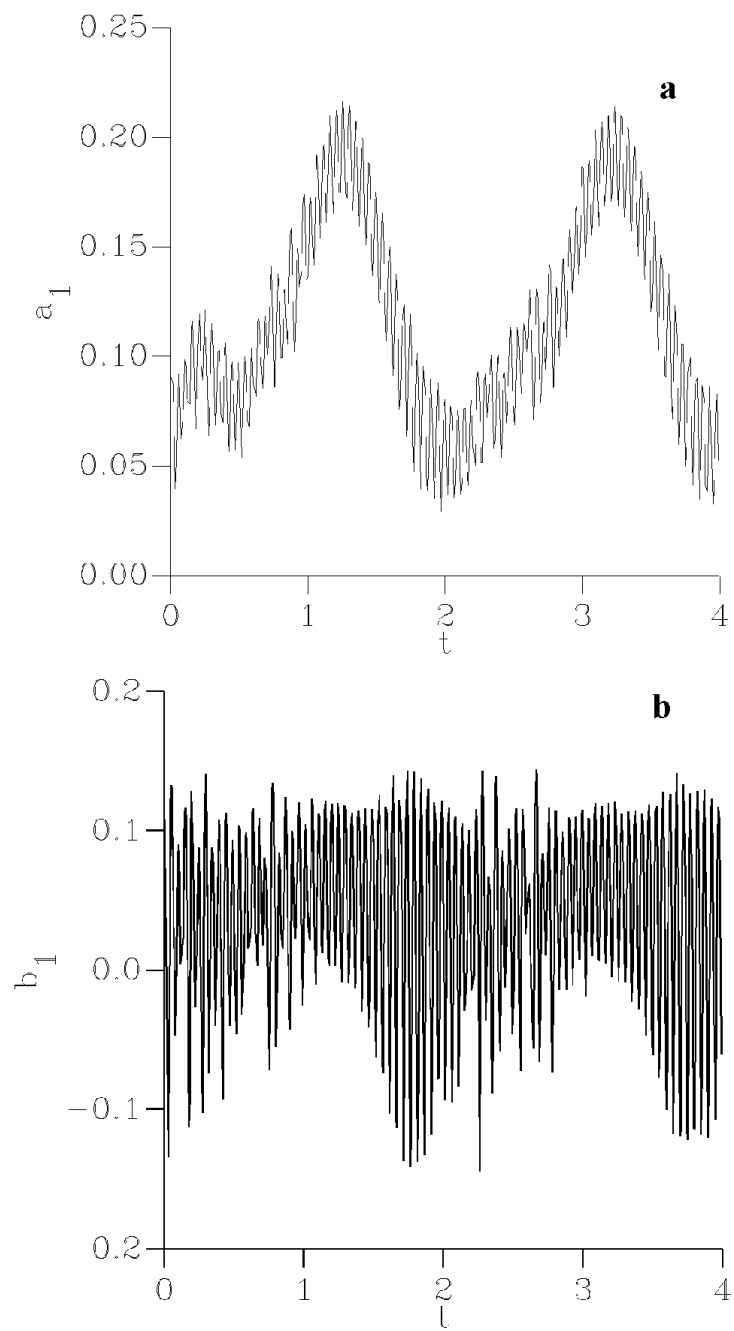


Рис. 3.8: Эволюция а) $a_1(t)$ и б) $b_1(t)$ в модели $\alpha\omega$ -динамо для $R_\alpha = -180$, $R_\omega = -180$.

ядра. Далее такую модель мы будем называть промежуточной.

Отсутствие конвекции в твердом ядре сводится к равенству нулю архимедовского ветра и гидродинамической спиральности. Тогда (3.4) может быть модифицировано следующим образом:

$$\zeta^a(r) = \begin{cases} 0, & r < R_2 \\ -R_\omega r, & R_2 < r < R_1 \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\alpha(\theta) = \begin{cases} 0, & r < R_2 \\ R_\alpha \alpha_0 \cdot \cos \theta, & R_2 < r < R_1. \end{cases} \quad (3.8)$$

Результаты моделирования приведены на рис. 3.9. При

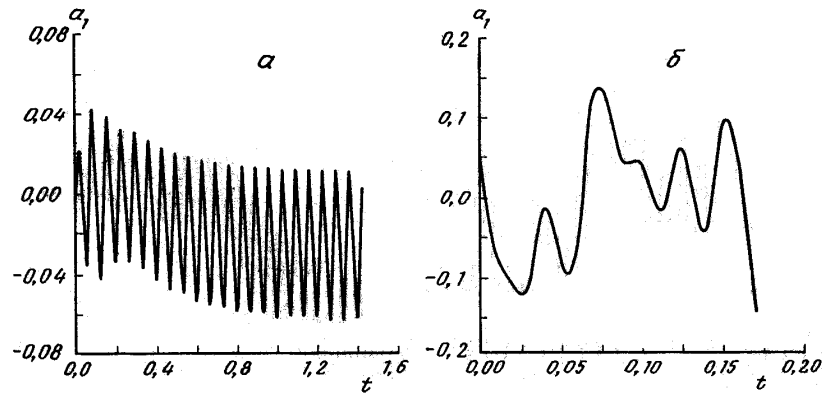


Рис. 3.9: Эволюция $a_1(t)$ в модели $\alpha\omega$ -динамо с учетом внутреннего ядра (промежуточная модель); а) $R_\alpha = 120$, $R_\omega = -120$; б) $R_\alpha = -180$, $R_\omega = -180$.

положительных значениях динамо-числа $D = 32\,000$ наблюдается новый режим, в котором знак магнитного момента меняется после нескольких колебаний с ненулевым средним значением. Это критическое значение несколько

больше, чем верхняя оценка динамо-числа (23 000) в работе [54], но не настолько, чтобы заведомо исключить его из рассмотрения.

3.4 Сравнение с наблюдениями и интерпретация

Поскольку рассмотренная в данной главе модель динамо является крупномасштабной, то далее мы вновь вернемся к сравнению полученных результатов с шкалой геомагнитной полярности (ШГП), использованной в главе 2, но с несколько большей детализацией [55]. (Отметим отдельно результаты, свидетельствующие о неоднозначности воспроизводимых спектральных источников на границе ядро-мантия для разных характеристик палеомагнитного поля, приведенные в Приложении D.)

Для этой цели мы используем данные по полярности геомагнитного поля за последние 165 млн. лет, приведенные в [56]. Наиболее яркой особенностью распределения инверсий поля во времени является существование в Мелу продолжительной зоны постоянной полярности, которую часто связывают с новым режимом генерации магнитного поля Земли. Для анализа эволюционных характеристик ШГП вновь используем вейвлет-анализ.

Рассмотрим вейвлет-преобразование сигнала полярности (см. подробнее главу 2 с шагом $\Delta t \sim 10^4$ л., используя в качестве базисной функции вейвлет Морле. На рис. 3.10 представлена эволюция спектра $\lg(w(a, t))$. Полученный

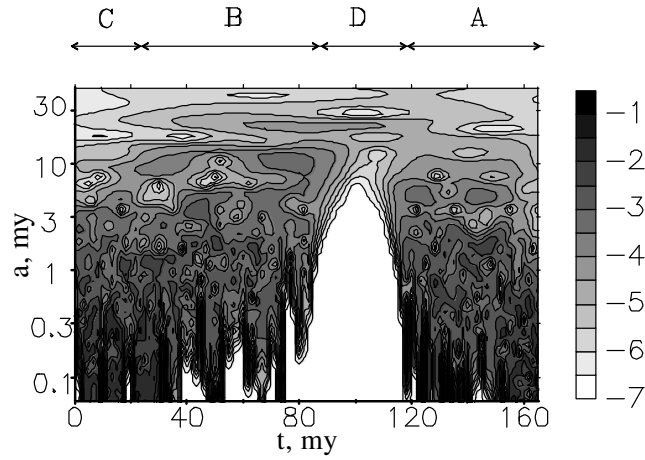


Рис. 3.10: Вейвлет-преобразование $\lg(w(a, t))$ сигнала полярности за последние 170 млн. лет для интервалов времени: А – 118 – 165Ma, В – 25 – 83Ma, С – 0 – 25Ma, D – 83 – 118Ma.

спектр $w(a, t)$ демонстрирует отсутствие ярко выделенных периодичностей, быть может, за исключением процесса с $a \sim 25$ млн.лет для интервала времени 20 – 130 млн.лет. Условно, вейвлет-диаграмму можно разделить на четыре области А, В, С и D: области А (118 – 165Ma) и С (0 – 25Ma) соответствуют областям с непрерывно заполненным спектром, область В (25 – 83Ma) характеризуется большей неоднородностью спектра в области малых масштабов ($a < 1$ млн.лет), и наконец, интервал суперхрона D: 83 – 118Ma.

На рисунке 3.11 приведена дисперсия

$$\sigma(a) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left(\lg(w(a, t)) - \lg(\overline{w(a)}) \right)^2 dt, \quad (3.9)$$

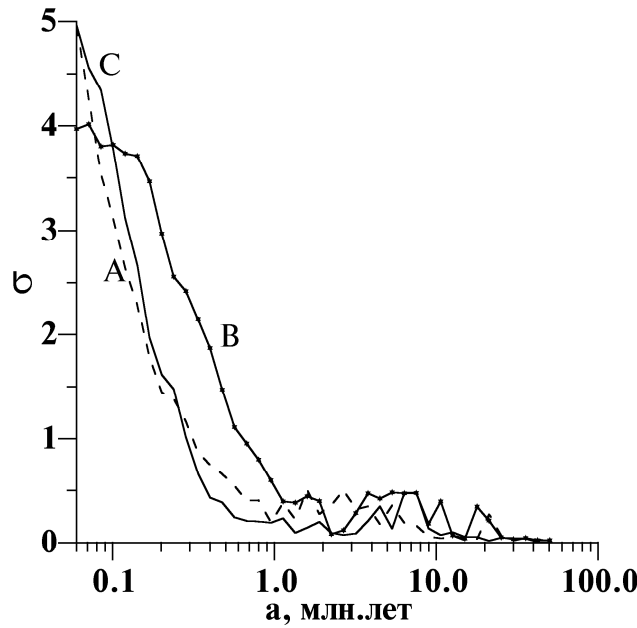


Рис. 3.11: Зависимость дисперсии $\sigma(a)$ для интервалов времени: А, В, С, D, см. рис. 3.10.

где $\overline{w(a)} = \frac{1}{t_2-t_1} \int_{t_1}^{t_2} w(a, t) dt$ – среднее по времени, для трех областей А, В и С. Поведение дисперсий характеризуется двумя режимами. Первый режим мелкомасштабный ($a < 1$ млн.лет): все три графика имеют приблизительно один и тот же наклон, однако величина дисперсии для интервала В после суперхрона превосходит значения дисперсий в спокойных областях А и С в два-три раза. Вторым режимом – с $a > 1$ млн. лет, здесь дисперсия слабо зависит от a и не претерпевает заметных изменений при прохождении суперхрона. Итак, на малых временных масштабах ($a < 1$ млн.лет) спектр ШГП содержит информа-

цию о суперхроне и после самого суперхрона. Отметим, что характерное время памяти (длительность интервала В) о суперхроне (D) существенно превышает не только характерные магнитогидродинамические времена ($\sim 10^4$ лет), но и продолжительность самого суперхрона D.

Напомним, что вывод о сходстве областей А и С ШГП был также сделан в работе [57] на основе анализа длительностей магнитозон постоянной полярности. Однако к полученному сходству необходимо относиться с осторожностью. Поскольку информация о полярности поля не отражает полного состояния системы геодинамо, необходимо использование дополнительных характеристик поля. В качестве таковых мы рассмотрели поведение палеонапряженности геомагнитного поля, взятой из работы [58]. Из рисунка 3.12 явно следует, что напряженность

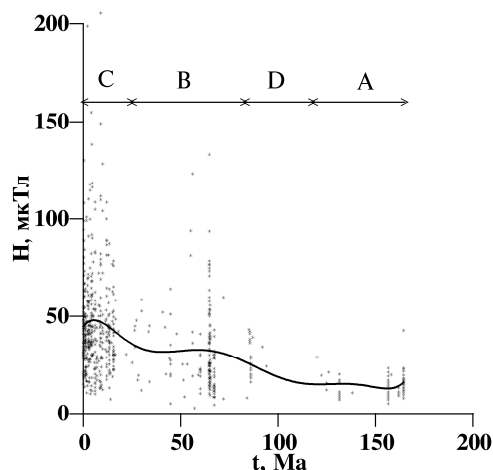


Рис. 3.12: Поведение палеоинтенсивности для интервалов времени: А, В, С, D, см. рис. 3.10.

современного поля (интервал С) превосходит его харак-

терную величину до суперхрона (А) более чем в два раза. В тоже время можно ожидать, что с увеличением величины динамо-числа напряженность магнитного поля также возрастет. Для возможной интерпретации, объединяющей подобное поведение спектров и палеонапряженности, мы обратимся к полученным выше результатам $\alpha\omega$ -моделирования.

Как уже упоминалось выше, свойства решения зависят от безразмерных амплитуд α - и ω -эффектов: $R_\alpha = \frac{\alpha L}{\eta_M + \eta_T}$ и $R_\omega = \frac{\Omega' L^2}{\eta_M + \eta_T}$, где $\alpha = \tau < v \text{ rot } v > / 3$, L – размер конвективной оболочки, Ω – угловая скорость дифференциального вращения, Ω' – ее производная по пространственной координате, η_M и $\eta_T \sim lv/3$ – коэффициенты молекулярной и турбулентной магнитной диффузии, $\tau \sim l/v$, l , v – время оборота турбулентного вихря, его пространственный масштаб и амплитуда скорости. Порог генерации в приближении $\alpha\omega$ -моделей зависит от амплитуды динамо-числа $D = R_\alpha \cdot R_\omega$. Для использованных распределений α -эффекта и архимедовского ветра (3.4) критическое динамо-число $D_\circ \approx 5600$. Есть основания считать (см. приложение С), что знак D , определяющий направление движения динамо-волн для Земли положителен: волны движутся от экватора к полюсам. При $D > D_\circ$ решение сначала периодически (с периодом $T_\circ \sim 10^4$ л.) и имеет нулевое среднее по времени. Поскольку в течение каждого такого колебания поле меняет свою полярность, то мы вправе отождествить эти колебания с частыми инверсиями.

При увеличении $D \approx 14\,000$ в решении появляется новая мода с ненулевым средним. Такой режим соответствует режиму без инверсий. Дальнейшее увеличение величины динамо-числа $D > 36\,000$ приводит к бифуркации третьей моды, решение становится хаотическим, вновь появляются инверсии. Величины R_α и R_ω в свою очередь зависят от режима теплового потока на границе ядро-мантия и слоя D'' . Рассматривая в первом приближении линейную зависимость Ω и v от плавучести Θ , пропорциональной отклонению градиента температуры в жидком ядре Земли от его адиабатического значения, имеем следующую зависимость: $D \sim \Theta^2 / (C + \Theta)^2$, где $C \sim \eta_M$. Поскольку оба члена в знаменателе одного порядка ($\eta_T \sim \eta_M$) [45], легко проверить, что при небольших изменениях Θ $D \sim \Theta$. Величина Θ в свою очередь зависит от состояния термического пограничного слоя D'' . Наличие устойчивого пограничного слоя приводит к уменьшению теплоотдачи, ослаблению конвекции. Поскольку сам пограничный слой может быть конвективным [59], а также за счет конвекции в ядре и нижней мантии, слой может разрушаться (возможно, локально), понижая температуру на внешней границе ядра на величину скачка в слое $\approx 1000^\circ$ [59], тем самым увеличивая конвекцию. Без учета конвекции в слое D'' оценка характерного времени прохождения теплового сигнала через слой дает $\sim \delta^2 / k = 10^2$ млн. лет, где $\delta = 10^2$ км – толщина слоя D'' , $k = 4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ – коэффициент его термодиффузии. Введение конвекции в D''

может уменьшить характерные времена процессов. Данные тепловые неустойчивости в D'' могут модулировать процессы геодинамо и регистрироваться в изменении частоты инверсий, величины палеонапряженности, дисперсии направления геомагнитного поля [60, 61].

Согласно этим представлениям можно предложить следующий сценарий процесса геодинамо за последние 165 млн. лет. На интервале А система находилась в слабо-возбужденном состоянии $D < 14\,000$, с небольшой напряженностью поля. В этот момент слой D'' имел наибольшую теплопроводность, соответственно, тепловой поток через слой был минимальным. Далее произошло частичное разрушение слоя D'' , приведшее к повышению интенсивности конвекции ($D > 14\,000$). Последнее привело к бифуркации в решении уравнения индукции для магнитного поля и появлению новой моды с ненулевым средним. Данное состояние (D) характеризуется полным отсутствием инверсий и повышением палеонапряженности поля. Следующие два интервала (В и С) отражают дальнейшее разрушение слоя D'' и соответствуют состоянию с повышенной интенсивностью конвекции и напряженностью поля. Отметим, что согласно приведенным расчетам, увеличение напряженности пропорционально \sqrt{D} . Начало интервала В совпадает с появлением хаотизации в решении ($D > 36\,000$) и характеризуется повышенной дисперсией. Увеличение интенсивности конвекции приводит к тому, что амплитуда “хаотической” моды возраста-

ет, становится сравнимой с амплитудой моды с ненулевым средним по времени, и инверсии снова становятся частыми (интервал C).

В заключении отметим, что рассмотренный сценарий является не единственно возможным. В качестве альтернативного может служить анализ на основе $\alpha^2\omega$ -моделей (см. подробнее об их свойствах [62]).

3.5 Оценка величины α -эффекта

В рассмотренных осесимметричных моделях генерации геомагнитного поля интенсивность генерации определяется амплитудами α - и ω -эффектов, в безразмерном виде — R_α и R_ω . Существует общепринятая оценка амплитуды ω -эффекта по величине западного дрейфа, однако оценка амплитуды α -эффекта довольно неопределенна.

Одной из первых моделей, в которой рассматривалась величина R_α для жидкого ядра Земли, была модель Брагинского [35], развитая затем Совардом [63]. Характерной особенностью этой модели является представление о том, что α -эффект создается крупномасштабными движениями малой амплитуды ($\sim R_m^{-1/2}$). При этом предполагается, что полоидальные компоненты магнитного поля и поля скорости значительно меньше тороидальных. Полученные в последнее время решения трехмерных динамомоделей, оперирующих с исходным уравнением индукции, а не с его следствиями для крупномасштабных ком-

понент магнитного поля (см., например, [9]), по-видимому противоречат такому предположению, поскольку в них присутствуют большие возмущения скорости малых масштабов, а тороидальные и полоидальные компоненты скорости и магнитного поля сравнимы по величине.

Альтернативной картиной α -эффекта является модель Штеенбека, Краузе и Рэдлера (см., ее современное изложение в [36]), которую далее для краткости будем называть ШКР. В ней рассматривается α -эффект, создаваемый относительно мелкомасштабными случайными движениями с большой амплитудой. Представляется, что эта картина лучше описывает решения типа Глатцмайера и Робертса [9], чем модель Брагинского.

Цель настоящей работы – оценить амплитуду α -эффекта для жидкого ядра Земли в модели ШКР. Мы рассмотрим также амплитуду ω -эффекта и вычислим динамо-число D . Полученное значение D достаточно велико (по абсолютной величине) для генерации геомагнитного поля и не противоречит обычной практике выбора динамо-числа в численных моделях геодинамо.

3.5.1 α -эффект в теории ШКР

В рамках простейшего варианта теории ШКР α -эффект выражается через спиральность турбулентного течения: $\alpha = -\tau \langle \mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v} \rangle / 3$, где v – турбулентная скорость, τ

– характерное время. Отсюда

$$|\alpha| \leq \tau v^2 / 3l, \quad (3.10)$$

где l - энергонесущий масштаб турбулентности [2]. В теории ШКР спиральность турбулентного потока создается кориолисовой силой. Исходя из сохранения углового момента, Краузе [36] оценил спиральность для случая больших значений турбулентного числа Россби $r_o = v/\Omega > 1$ следующим образом:

$$|\alpha| \sim \Omega l^2 / L, \quad (3.11)$$

где Ω - угловая скорость. Однако, для ядра Земли $r_o \ll 1$. В самом деле, $r_o = (v/V)(L/l)Ro$, где Ro – число Россби для крупномасштабных движений в жидком ядре, L и V – характерные масштаб и скорость крупномасштабных движений. При этом $Ro \sim 4 \cdot 10^{-7}$ [45]. Множитель $(v/V)(L/l)$ не настолько велик, чтобы компенсировать малость Ro (см. ниже формулы (3.27-3.28)). Поэтому для ядра Земли формула (3.11) дает большие величины для α , чем это допускается верхней оценкой (3.10).

В этих условиях естественно принять правую часть верхней оценки (3.10) за реальную величину спиральности, поэтому далее мы будем оценивать α следующим образом:

$$|\alpha| = k\tau v^2 / 3l, \quad (3.12)$$

где безразмерный коэффициент $k \leq 1$.

Оценка характерного времени τ в формулах (3.10–3.12) зависит от величины магнитного числа Рейнольдса $r_m =$

vl/η , связанного с турбулентностью (здесь η – коэффициент молекулярной магнитной диффузии). Если $r_m \geq 1$, то естественно отождествить τ с временем памяти турбулентности l/v . Если же $r_m \ll 1$, то для оценки τ можно выбрать диффузионное время l^2/η . В результате

$$|\alpha| = vk/3 \begin{cases} 1, & \text{если } r_m \geq 1 \\ r_m, & \text{если } r_m \ll 1. \end{cases} \quad (3.13)$$

Обычно амплитуда α -эффекта характеризуется безразмерным числом $R_\alpha = \alpha L/\eta^*$, где коэффициент магнитной диффузии η^* представляет собой сумму молекулярного η и турбулентного $\eta_T = vl/3$ коэффициентов магнитной диффузии. (Напомним, что в теории ШКР турбулентность играет ключевую роль.) Отметим также, что $r_m = \frac{3\eta_T}{\eta}$. В итоге получаем

$$R_\alpha = k \frac{L}{l} \frac{r_m}{r_m + 3} \begin{cases} 1, & \text{для } r_m \geq 1 \\ r_m, & \text{для } r_m \ll 1. \end{cases} \quad (3.14)$$

Величина ω -эффекта характеризуется безразмерным числом $R_\omega = (\partial\omega/\partial r)L^3/\eta^*$, где ω – скорость дифференциального вращения в системе координат, связанной с поверхностью Земли. За меру дифференциального вращения $(\partial\omega/\partial r)L^2$ в модели геодинамо принимают амплитуду предписанной архимедовской скорости, а для численных оценок ее отождествляют со скоростью западного дрейфа V . В итоге получаем

$$R_\omega = 3 \frac{V L}{v l} \frac{r_m}{r_m + 3}. \quad (3.15)$$

Используя оценки (3.14-3.15) получаем для динамо-числа:

$$D = R_\omega R_\alpha = 3k \frac{V}{v} \left(\frac{L}{l} \right)^2 \left[\frac{r_m}{r_m + 3} \right]^2 \begin{cases} 1, & \text{если } r_m \geq 1; \\ r_m, & \text{если } r_m \ll 1. \end{cases} \quad (3.16)$$

Очевидно, что генерация магнитного поля может происходить только при больших магнитных числах Рейнольдса. Из этого непосредственно не следует, что для генерации должно быть велико и *турбулентное* магнитное число Рейнольдса. Однако, это представляется более чем вероятным. Далее мы будем придерживаться этой точки зрения и увидим, что она находится в согласии с наблюдательными данными.

3.5.2 Оценки R_α и R_ω из наблюдательных данных

Поскольку турбулентность в ядре Земли недоступна непосредственному наблюдению, мы оценим числа R_α и R_ω по косвенным данным. Мы представим эти наблюдательные данные как набор трех характерных времен – времени затухания дипольного поля τ , характерное время западного дрейфа T_{WD} и основного периода изменения магнитного поля T_o . Два последних времени прямо известны из археологических и палеомагнитных наблюдений, а первое оценивается путем экстраполяции к условиям жидкого ядра лабораторных данных о проводимости сред.

Выразим сначала интересующие нас безразмерные числа через три рассматриваемые характерные времени. Характерное время затухания дипольного поля равно (см.,

например, [45]):

$$\tau = \frac{L^2}{\pi^2 \eta^*}. \quad (3.17)$$

Период западного дрейфа можно связать с его скоростью V , отождествляя для оценок L с радиусом ядра: $V = 2\pi L/T_{WD}$. Для оценки основного периода колебаний используем оценку, приведенную в [64]:

$$T_o = (2\pi/D^{1/2})(L^2/\eta^*). \quad (3.18)$$

Строго говоря, эта оценка была получена для $\alpha\omega$ -динамо. Однако, если $R_\alpha/R_\omega \ll 1$, она, по-видимому, справедлива и для $\alpha^2\omega$ -динамо. Ниже мы покажем, что в наших оценках получается именно такое соотношение между R_α и R_ω , поэтому мы будем пользоваться оценкой (3.18) для обоих типов динамо.

Комбинируя (3.17-3.18), имеем:

$$R_\omega = 2\pi^3 \left(\frac{\tau}{T_{WD}} \right), \quad (3.19)$$

$$D = 4\pi^6 \left(\frac{\tau}{T_o} \right)^2, \quad (3.20)$$

$$R_\alpha = 2\pi^3 \left(\frac{T_{WD}\tau}{T_o^2} \right). \quad (3.21)$$

Очевидно также, что

$$R_\alpha/R_\omega = \left(\frac{T_{WD}}{T_o} \right)^2. \quad (3.22)$$

Замечательно, что отношение между R_α и R_ω выражается через непосредственно наблюдаемые величины. Палеомагнитные данные (см., например, [45]) дают $T_{WD} \sim$

$2 \cdot 10^3$ лет, $T_o \sim 10^4$ лет, так что $T_{WD}/T_o \sim 1/5$, поэтому $R_\alpha/R_\omega \sim 1/25$. Итак, согласно наблюдательным данным, $R_\alpha \ll R_\omega$, однако отношение этих чисел, по-видимому, все же не настолько мало, чтобы вовсе исключить участие спиральности в создании тороидального магнитного поля из полоидального. Учет этого процесса и является отличительной особенностью $\alpha^2\omega$ -динамо. Мы уточним эти соображения ниже.

Далее нам потребуется еще одно представление для времени затухания τ дипольного магнитного поля

$$\tau = \tau_\sigma(1 + r_m/3)^{-1}, \quad (3.23)$$

где $\tau_\sigma = L^2/\pi^2\eta$ – время затухания дипольного поля под действием одной лишь молекулярной магнитной диффузии. Напомним, что $\eta = 1/\mu_o\sigma$, где σ – проводимость жидкого ядра, а $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная. Теперь удобно ввести новые параметры: $R_{\omega\sigma} = 2\pi^3\tau_\sigma/T_{WD}$, $R_{\alpha\sigma} = 2\pi^3T_{WD}\tau_\sigma/T_o^2$, $D_\sigma = 4\pi^6(\tau_\sigma/T_o)^2$, так что

$$R_\omega = R_{\omega\sigma} \frac{1}{1 + r_m/3}, \quad R_\alpha = R_{\alpha\sigma} \frac{1}{1 + r_m/3}, \quad D = D_\sigma(1+r_m/3)^{-2}. \quad (3.24)$$

Используя данные о проводимости вещества в условиях, которые считаются типичными для жидкого ядра [45] $\sigma = 5 \cdot 10^5$ сек·м⁻¹, имеем: $\tau_\sigma = 7.7 \cdot 10^{11} = 2.5 \cdot 10^4$ лет. Изменения магнитного поля Земли не являются строго периодическими, однако в них выделяется квазипериод порядка 10^4 лет, который мы и отождествим с T_o . Тогда

$D_\sigma = 23\,000$. Согласно (3.24), для получения самовозбуждения магнитного поля r_m должно быть не слишком велико. Например, Робертс [46] оценил порог возбуждения динамо как $D = 5\,500$. Поскольку мы считаем, что r_m не может быть и слишком малым, мы приходим к выводу, что турбулентная диффузия магнитного поля η_T в ядре порядка молекулярной диффузии η . Заметим, что это предположение неявно фигурирует практически во всех численных исследованиях задачи геодинамо.

Принимая для оценок $r_m = 3$, получаем

$$R_\omega = 380, \quad R_\alpha = 15, \quad D = 5\,750. \quad (3.25)$$

Если же принять $r_m = 1$, то $R_\omega = 570$, $R_\alpha = 23$, $D = 1.3 \cdot 10^4$.

Теперь мы можем уточнить вопрос о том, какая из разновидностей динамо средних полей лучше описывает геодинамо. Поскольку мы получили $R_\alpha \ll R_\omega$, речь вряд ли может идти об α^2 -динамо. В простейших случаях роль спиральности в образовании тороидального магнитного поля из полоидального нужно принимать вплоть до (см. [3]):

$$R_\alpha^2 \sim R_\omega. \quad (3.26)$$

Поскольку эта оценка согласуется с (3.25), механизмы $\alpha\omega$ - и $\alpha^2\omega$ -динамо кажутся наиболее адекватными для описания генерации магнитного поля Земли. Отметим, что вид оценки (3.26) зависит от конкретной геометрии задачи [65]. Поэтому вопрос требует дальнейшего изучения.

3.5.3 Параметры турбулентности в жидком ядре Земли

В этом разделе исходя из полученных значений R_ω и R_α мы получим оценки параметров турбулентности в жидком ядре Земли. Как и раньше, мы принимаем $r_m = 3$. Из (3.14) имеем $l/L = (k/2)/R_\alpha^{-1}$, а из (3.15), (3.19) и (3.21) получаем

$$v/V = (3/k)(T_{WD}/T_o)^2. \quad (3.27)$$

Отметим, что согласно (3.27) оценка турбулентной скорости не зависит от неопределенностей в оценке проводимости ядра. Используя приведенную выше оценку T_{WD}/T_o , получаем $v/V = 0.12k^{-1}$. Это значит, что турбулентная скорость довольно велика. Принимая $k = 1/2$, получаем $v/V \sim 1/4$. Эти оценки качественно согласуются с расчетами Глатцмайера и Робертса [9], в которых возмущения скорости сравнимы со значениями регулярных осесимметричных скоростей.

Напротив, пространственный масштаб турбулентности в нашей модели относительно мал:

$$l/L = 1/2kR_\alpha. \quad (3.28)$$

Выбором параметров этот масштаб можно слегка увеличить, но величина l/L не может быть сделана большей 0.1. Тем не менее, эта оценка пространственного масштаба турбулентности не противоречит, скажем, представлениям о композиционной конвекции как об источнике турбулентных течений в ядре Земли.

Теперь мы можем вычислить другим способом турбулентное магнитное число Рейнольдса

$r_m = vl/\eta = R_\omega(3/k)(R_\alpha/R_\omega)(k/2)/R_\alpha = 3/2$. Напомним, что мы принимали для оценок $r_m = 3$, что совпадает по порядку величины с новой оценкой. Итак, наши оценки оказываются самосогласованными.

3.6 Модель подавления α -эффекта магнитным полем и энергетический баланс планетарного динамо

Быстровращающиеся планеты с жидким ядром могут генерировать магнитные поля с энергией, превосходящей кинетическую энергию (оцененную даже по крупномасштабному дифференциальному вращению) в Ro^{-1} , где число Россби $Ro \ll 1$. Далее мы рассмотрим это явление в приближении магнитострофического баланса. В рамках подходов магнитной гидродинамики средних полей предложен сценарий подавления гидродинамической спиральности магнитным полем. Предложенная модель апробирована на ряде планет и спутников Солнечной системы.

Многие планеты Солнечной системы обладают своим собственным магнитным полем [66, 67, 68, 69], которое генерируется процессами динамо в жидком ядре. Еще до появления детальных моделей планетарного динамо были попытки связать основные характеристики динамо-процессов между собой. Первый скейлинговый закон был

предложен Блэкеттом [70], так называемый закон Боде. Этот закон описывает связь между магнитным и угловым моментами планет. В работе [71] обсуждается возможность экстраполяции закона на случай звезд и галактик. Несмотря на то, что некоторые детали скейлинговых законов дискуссионны [72, 73, 74], в первом приближении применимость этих законов для большинства планет Солнечной системы не вызывает сомнений. Мотивация магнитного закона Боде следующая: имея сходное внутреннее строение и предполагая сходный механизм генерации магнитного поля в ядре (например, описываемый $\alpha\omega$, $\alpha^2\omega$ -моделями динамо [75, 76], можно ожидать единую зависимость магнитного момента от углового момента планеты.

Основным контраргументом закону Боде является отсутствие учета специфических особенностей процессов динамо в той или иной планете, ее строения. Ярким таким примером было предсказание магнитного поля на Венере, которое было опровергнуто прямыми наблюдениями [77]; см. также [78].

Следующий шаг в создании скейлинговых законов был сделан в [79, 45], где был предложен баланс силы Кориолиса и градиента давления – так называемый геострофический баланс (см. обзор в [80]). Основываясь на этом подходе оценка величины магнитного поля получается из баланса силы Лоренца и инерционных членов в уравнении Навье-Стокса. Этот подход часто применяет-

ся в астрофизике для медленно вращающихся тел (число Россби $Ro \sim 1$). Следуя этой идее можно ожидать, что магнитное поле будет расти до тех пор, пока сила Лоренца не будет сравнима с инерционным членом. После этого начнется обратное влияние магнитного поля на течение, и наступит равнораспределение кинетической и магнитной энергий [2, 4], как это, например, в случае солнечного и галактического динамо [48, 3].

Отличительной чертой магнитного поля Земли [81] и, возможно, других планет солнечной системы, является преобладание энергии магнитного поля над кинетической на несколько порядков (сверхраспределение). Этот факт также подтверждается прямыми трехмерными вычислениями [9]. Если наличие сильного магнитного поля в жидком ядре может быть связано в трехмерных моделях с бессиловой природой магнитного поля, то аналогичное объяснение в терминах динамики средних полей на данный момент все еще отсутствует. Следуя простой модели подавления спиральности (см. ниже подраздел 3.6.2, формулы (3.38-3.39)) можно ожидать, что после наступления равнораспределения магнитное поле подавит α -эффект и как следствие – сделает невозможным дальнейшую генерацию магнитного поля. Возникает два вопроса: как объяснить существование состояния со сверхраспределением магнитной энергии и как объяснить это явление в терминах динамики средних полей?

Для ответа на первый вопрос в работе [82] было предло-

жено магнитогеострофическое состояние, согласно которому существует баланс сил Лоренца и Кориолиса. Этот подход позволяет получить оценки магнитной энергии в Ro^{-1} раз большие кинетической энергии (см. [45] и детальный анализ для магнитосферы Нептуна в [80]).

Тем не менее, вопрос о применимости теории средних полей в задаче о сверхраспределении остается открытым. Для решения этой задачи мы предлагаем простую модель подавления спиральности, позволяющую получить как состояние равнораспределения для медленно вращающихся тел, так и состояние со сверхраспределением для быстро вращающихся тел. В заключение рассмотрены применимость модели на ряде планет и спутников, имеющих свое собственное магнитное поле.

3.6.1 Два вида баланса

Поскольку уравнение индукции для магнитного поля при постоянном во времени поле скорости имеет экспоненциальное решение, то необходим учет обратного влияния магнитного поля на поле скорости путем введения сил Лоренца в уравнение Навье-Стокса. Обычно учитывается вклад четырех членов: инерционного члена, силы Лоренца, Кориолисовой силы и градиента давления. Геоострофическим балансом называется состояние, когда Кориолисов член уравновешивается градиентом давления и как следствие – сила Лоренца должна быть одного порядка с инерционным членом. Данное приближение часто исполь-

зуется в астрофизике.

Другой тип баланса, так называемый магнитогеострофический баланс, предполагает, что сила Кориолиса уравновешена силой Лоренца. Далее мы рассмотрим оба вида балансов в терминах моделей $\alpha\omega$ -моделей.

В приближении геострофического баланса имеем:

$$(\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H} / 4\pi \sim \rho (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}, \quad (3.29)$$

где полное магнитное поле и поле скорости \mathbf{H} , \mathbf{V} есть суммы крупномасштабных \mathbf{B} , \mathbf{U} и мелкомасштабных \mathbf{b} , \mathbf{v} , составляющих. По порядку величины формула (3.29) дает оценку

$$\frac{H^2}{8\pi} \sim \frac{\rho V^2}{2}, \quad (3.30)$$

что является хорошо известным соотношением, описывающим равнораспределение:

$$E_M \sim E_K. \quad (3.31)$$

Другими словами, магнитная энергия растет в таких объектах до момента, когда вступает в силу оценка (3.31). Далее можно ожидать, что магнитное поле окажет обратное воздействие на течение, и рост магнитного поля прекратится.

Рассмотрим применимость оценки (3.31) для Земли. Оценка плотности крупномасштабной кинетической энергии по скорости западного дрейфа $V_{WD} = 0.04 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ дает: $E_K = \rho V_{WD}^2 / 2 \approx 8 \cdot 10^{-3} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-3}$, где плотность жидкого ядра $\rho = 10 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$. Грубая оценка кинетической энергии

для мелкомасштабных течений может быть сделана, если принять, что $l = L/10$ and $v = V_{WD}/4$, где L – основной масштаб [54]. Тогда $E_K = \rho v^2/2 = 5 \cdot 10^{-4}$ эрг/см³.

Поскольку тороидальная компонента магнитного поля не наблюдаема на поверхности Земли, оценка магнитной энергии зависит от модели динамо. Величина дипольного магнитного поля на поверхности Земли известна из прямых наблюдений $B_P^{\text{surf}} \approx 0.5\text{Г}$. Экстраполяция полярной компоненты поля на границу ядро-мантия дает $B_P^c \approx 5\text{Г}$ [81]. Первая из оценок величины тороидальной компоненты магнитного поля B_T в приближении сильной генерации, сделанная в [83], приводит к $B_T \approx 500\text{Г}$, что эквивалентно оценке для энергии геомагнитного поля $E_M = B_T^2/8\pi \approx 3 \cdot 10^2$ эрг/см³.

Нижняя оценка, основанная на предположении, что $B_T \sim B_P \approx 3 \text{ Г}$ дает $E_M = 0.7$ эрг см⁻³. Эта ситуация может быть реализована в случае $\alpha^2\omega$ -модели динамо.

Таким образом мы делаем заключение, что стандартная оценка магнитной энергии превышает энергию крупномасштабных течений более чем на 4 порядка и энергию мелкомасштабных течений на 6 порядков. Даже для нижней оценки E_M это отношение в $10^2 \div 10^3$ раз больше.

Сравнение магнитных и кинетических энергий, полученных в численных расчетах, приводит к тем же результатам. Так, для трехмерной модели геодинамо [9] $E_M/E_K \sim 4 \cdot 10^3$. Аналогичные результаты были неоднократно получены для динамо средних полей.

Становится очевидным, что геострофический баланс для Земли не подходит.

Рассмотрим магнитогеострофический баланс, в котором сила Кориолиса уравновешена силой Лоренца:

$$(\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H} / 4\pi \sim 2\rho\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}. \quad (3.32)$$

После простых преобразований приходим к

$$\rho \frac{V^2}{2} \sim \frac{V}{2\Omega L} \frac{H^2}{8\pi}. \quad (3.33)$$

Последнее соотношение может быть переписано в виде

$$E_k \sim Ro E_m, \quad (3.34)$$

где $Ro = V(2\Omega L)^{-1}$ – число Россби. Следовательно, тела с быстрым вращением ($Ro \ll 1$) могут генерировать очень сильное магнитное поле, которое может превышать кинетическую энергию дифференциального вращения на несколько порядков. Отметим, что большинство планет Солнечной системы и Земля включительно ($Ro_{\text{Earth}} \sim 4 \cdot 10^{-7}$) удовлетворяют критерию быстровращающегося тела.

Далее нам необходимо объяснить почему сильное магнитное поле не подавляет процесс динамо. Для того, чтобы дать подобное объяснение в терминах динамо средних полей, необходимо предложить модель подавления спиральности, предполагающую существование α -эффекта в сильных магнитных полях.

3.6.2 Модель подавления α -эффекта

Согласно представлениям динамики средних полей [36] гидродинамическая спиральность вращающегося тела производится силой Кориолиса и Архимеда и может быть оценена как

$$\alpha = \frac{\Omega l^2}{L}, \quad (3.35)$$

где l – масштаб турбулентности (данная оценка носит имя Краузе).

Оценка (3.35) дает нереалистично высокое значение для α . Если мы примем для Земли $l/L = 0.1$, формула (3.35) даст $\alpha = 35 \text{ см}\cdot\text{с}^{-1}$, что много больше обычных оценок для скорости западного дрейфа $v = V_{WD}/4 \approx 10^{-1} \text{ см}\cdot\text{с}^{-1}$. Кажется мало вероятным, что α может превосходить v . Действительно,

$$\alpha = \tau \langle v \text{rot } v \rangle, \quad (3.36)$$

где $\tau = l/v$ – характерное время оборота турбулентного вихря и $\langle \dots \rangle$ – осреднение по ансамблю. Данная оценка впервые была сделана в [2] и является верхней оценкой для величины α -эффекта:

$$\alpha < v, \quad (3.37)$$

известной как оценка Моффата (число Струхала предполагается равным единице).

Таким образом, сила Кориолиса может создать много больший α -эффект, чем это разрешено оценкой Моффата

для вращающегося тела. Другими словами, сила Кориолиса делает все вихри, скажем, вращающимися вправо и могла бы воспроизвести таких вихрей даже больше, чем их имеется в наличии.

Дальнейший анализ посвящен обратному влиянию магнитного поля на α :

$$\alpha = \alpha_0 f(E_M/E_K), \quad (3.38)$$

где f – убывающая функция. Точный вид нелинейности, включенной в f зависит от модели. Следуя [84], мы предлагаем простую интегральную форму нелинейности

$$f(E_M/E_K) = \frac{1}{1 + E_M/E_K}. \quad (3.39)$$

Данная формула есть ни что иное, как оценка (3.31), основанная на v и B . В тоже время использование наблюдаемых энергий в (3.39) приводит к малой амплитуде α (рис. 3.13, пунктирная линия), и как результат – к подавлению генерации магнитного поля. Далее мы предполагаем, что увеличение магнитного поля не будет подавлять α -эффект до тех пор, пока силы Лоренца не станут сравнимы с силами Кориолиса. Другими словами мы предлагаем следующую оценку подавления спиральности:

$$\alpha = \min\left(v, \frac{\Omega l^2}{L} f(E_M/E_K)\right), \quad (3.40)$$

или

$$\alpha = \alpha_0 \min(1, kRo^{-1} f(E_M/E_K)), \quad (3.41)$$

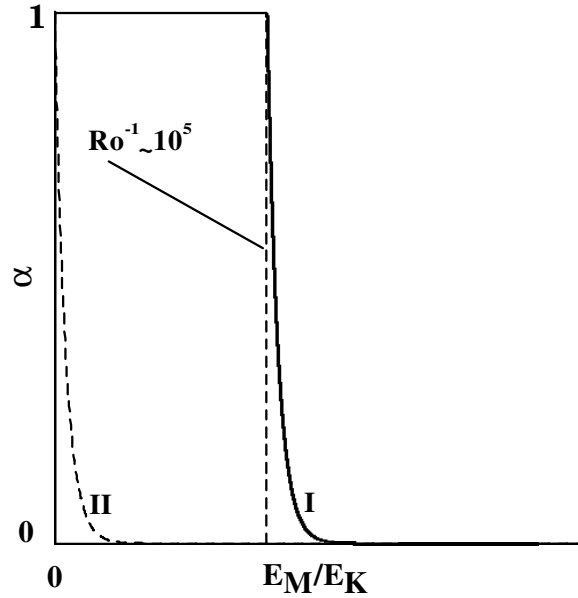


Рис. 3.13: Зависимость α -эффекта от величины магнитной энергии. Сплошная линия соответствует состоянию сверхраспределения, пунктирная – состоянию равнораспределения.

где

$$k = \frac{V}{v} \left(\frac{l}{L} \right)^2. \quad (3.42)$$

Формула (3.42) может быть использована для оценки минимальной амплитуды магнитной энергии при которой начинается подавления спиральности:

$$kRo^{-1} f(E_M/E_K) \sim 1. \quad (3.43)$$

Когда $kRo^{-1} \gg 1$ оценки (3.39, 3.43) приводят к соотношению

$$E_M \sim kRo^{-1} E_K, \quad (3.44)$$

близкому формуле (3.34). Предложенные выше оценки для конвекции в жидком ядре Земли сводятся к $k = 0.04$ и

$$E_M/E_K \sim 10^5. \quad (3.45)$$

Эта оценка уже близка к наблюдениям и результатам численного моделирования. Следуя этой простой модели мы можем заключить, что α в жидком ядре Земли может быть оценено из (3.37) без учета подавления спиральности до тех пор, пока $E_M \sim Ro^{-1}E_K$. Далее необходим учет подавления спиральности. Соответствующий схематичный рисунок предлагаемого подавления спиральности представлен на рис. 3.13 (сплошная линия).

Итак, предлагается следующий сценарий эволюции магнитного поля. Начальное магнитное поле начинает расти. На первоначальном этапе магнитное поле не оказывает влияния на α -эффект. Эта ситуация сохраняется до тех пор, пока не выполнено условие (3.34). Далее наступает влияние магнитного поля на α -эффект, и экспоненциальный рост магнитного поля прекращается. Устанавливается состояние сверхраспределения.

3.6.3 Приложение к другим планетам

Несмотря на то, что внутреннее строение других планет Солнечной системы отличается от земного, все эти планеты можно отнести к быстровращающимся объектам с $Ro \ll 1$ и к ним можно применить оценку (3.44). Мы

Параметры планет.

| Планета | Период дни | Внешний радиус км | B гаусс | Плотность г см ⁻³ | Тепловой поток эрг см ⁻² с ⁻¹ |
|-------------|---------------|----------------------|--------------|---------------------------------|--|
| 1. Меркурий | 58.65 | 1750 | 0.0093 | 7.6 | 17 |
| 2. Земля | 1 | 3485 | 1.868 | 10.615 | 62 |
| 3. Юпитер | 0.41 | 55000 | 9.396 | 1.33 | 5400 |
| 4. Сатурн | 0.44 | 29000 | 1.907 | 0.7 | 2000 |
| 5. Уран | 0.72 | 17500 | 0.714 | 1.31 | 180 |
| 6. Нептун | 0.67 | 17500 | 0.404 | 1.66 | 285 |
| 7. Венера | 243.01 | 3150 | 0.0001 | 10.6 | 62 |
| 8. Марс | 1.03 | 1780 | 0.002 | 7.57 | 17 |
| 9. Ио | 1.77 | 561 | 0.37 | 5.3 | 1400 |
| 10. Луна | 27.32 | 400 | 0.0001 | 3.5 | 17 |
| 11. Ганимед | 7.2 | 660 | 269.5 | 5.15 | 1 |

предлагаем отношение $R = E_M/E_K$ для планет солнечной системы и некоторых планет-спутников, обладающих своим собственным магнитным полем (таблица 3.6.3). Использованные данные были взяты в основном из [74] и для Ганимеда из [85]. Здесь B – наблюдаемое полоидальное магнитное поле на поверхности ядра.

Пусть планетарное динамо вида $\alpha\omega$ с $R_\omega \sim 10^2$. Тогда магнитная энергия в предположении, что тороидальное поле $B_{tor} \sim R_\omega B$, может быть оценена по порядку величины как

$$E_M = \frac{(R_\omega B)^2}{8\pi}. \quad (3.46)$$

Для оценки кинетической энергии E_K необходима информация о скоростях V (или v) в ядре Земли. Согласно [80] мы оценим V как $V = (FK)^{\frac{1}{3}}/\rho$, где F – наблюдаемый тепловой поток на поверхности планеты, ρ – плотность жидкого ядра; также мы примем, что отношение

теплового потока из жидкого ядра к полному наблюдаемому потоку на поверхности планеты равно $K = 0.25$. Обычно Земля, планеты и спутники имеют $R \gg 1$ (см. рис. 3.14).

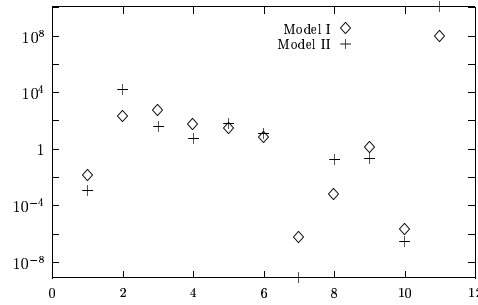


Рис. 3.14: Отношение магнитной и кинетической энергий R для различных планет. Тепловой поток оценен по [80] (Model I) и [86] (Model II).

Очень большое значение для Ганимеда может быть вызвано двумя факторами: 1) необходимостью использования модели α^2 -динамо, в котором полоидальное и тороидальное поле одного порядка; 2) выносом тороидального поля на поверхность планеты. В обоих случаях множитель R_ω в формуле (3.46) может быть опущен и значение $R \cdot Ro$ будет меньше. Мы также предлагаем оценки для R с использованием других формул для V : $V = FK K_K (2\Omega\rho\nu_T)^{-1}$, где $K_K = 0.25$ – КПД Карно [86], коэффициент турбулентной вязкости $\nu_T = 2 \cdot 10^4 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$. Отметим, что последние оценки основаны на результатах расчетов Глатцмайера и Робертса и хорошо согласованы с наблюдениями.

Как следует из (3.44) $Ro \frac{E_M}{E_K} \sim k$. Используя оценку

$k \sim 1/2$ для Земли (см. подраздел 3.5.3) мы можем ожидать, что $R \cdot Ro$ имеет тот же порядок величины для всех планет с магнитным полем. Соответствующие оценки этой характеристики для обеих моделей представлены на рис. 3.15, из чего следует, что большие значения R

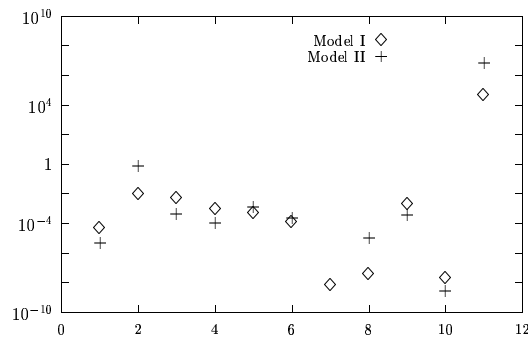


Рис. 3.15: Отношение магнитной и кинетической энергий (см. рис. 3.14), умноженное на Ro ($R \cdot Ro$) для различных планет.

укладываются в теорию динамо средних полей и подавления α -эффекта.

В работе показано, что предлагаемая модель подавления магнитным полем α -эффекта находится в хорошем согласии с наблюдениями. Использование данного подхода позволяет (хотя бы качественно) объяснить существование систем, в которых магнитные энергии превосходят кинетические энергии, в терминах динамики средних полей. Хотелось бы подчеркнуть, что оценка Моффата соответствует случаю однородной турбулентности. Поскольку в случае планетарного динамо имеется быстрое суточное вращение системы, а также сильное магнитное поле, то к

данной оценке необходимо подходить осторожно. Более точный анализ требует введения тензора спиральности α_{ij} . Соответствующее расширение динамики средних полей на этот случай можно найти в [87]. Однако, как показывает анализ современных работ, явного вида нелинейности для α_{ij} в случае анизотропной турбулентности все еще нет. Согласно [88] подавления α -эффекта магнитным полем ведет к вырожденной двумерной турбулентности, в которой движения происходят в плоскостях перпендикулярных направлению среднего магнитного поля. Однако соответствующее развитие данного подхода на случай геодинамо пока еще отсутствует.

Наша модель предполагает оценку кинетической энергии, основываясь на оценках скорости по западному дрейфу ($v \sim V_{WD}$). Другой возможностью является подход предложенный в [89], когда v может быть сопоставлено с альфвеновскими скоростями и сам α -эффект создается альфвеновскими волнами, что изначально предполагает существование равномерного распределения. Для Земли оценки для альфвеновских скоростей следующие: $v_A = B/4\pi\rho^{1/2} = 1 \div 10 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$. Тогда, величина α становится сравнимой с оценкой Краузе. Пространственный масштаб l волновых движений может быть оценен как $l \sim \nu_T v_A^{-1} \approx 10^4 \text{ см}$ (здесь ν_T – коэффициент турбулентной магнитной диффузии), что существенно превышает точность современных наблюдательных данных. Изучение подобного случая требует дальнейшего анализа.

3.7 Обсуждение

Рассмотренная в данной главе модель $\alpha\omega$ -динамо является следующим по степени усложнения шагом на пути описания процессов в жидком ядре Земли и включает в рассмотрение обратное влияние магнитного поля на крупномасштабное поле скорости.

Поскольку, вообще говоря, рассмотренные бифуркации решений для магнитного поля имеют пороговый характер (т.е., небольшое изменение в величине динамо-числа может привести к появлению нового режима генерации), то продемонстрированная смена режимов может иметь реальное геофизическое приложение. Данные изменения могут быть следствием тепловых неустойчивостей в слое D'' . Отметим, что пороговость решения не требует кардинальных изменений в тепловом режиме, управляющем конвекцией в жидком ядре (во всяком случае при рассмотрении двух режимов) и нет необходимости привлечения “катастрофического” механизма инверсий, основанного на кардинальной перестройке течений в жидком ядре [90] под действием внешних сил [91].

С другой стороны, поскольку процессы геодинамо тесно связаны с тепловым режимом ядро-мантия, конвекцией в мантии, и, в частности, с тепловым пограничным слоем D'' [92], то логично ожидать модуляции этих процессов, что проявляется в существовании периодичностей числа инверсий, напряженности поля и т.д., и необходимы

дальнейшие исследования.

Здесь не была исследована модель $\alpha^2\omega$ -динамо, которая могла бы быть также интересна. Причин тому было несколько: во-первых, чисто исторически осевая симметрия геомагнитного поля всегда связывалась с преобладающей ролью дифференциального вращения над спиральностью ($\alpha\omega$ -динамо) [76]. Несмотря на недавние работы [9, 10, 11], в которых обе компоненты сравнимы по величине, данный вопрос все еще остается открытым. Во-вторых, более актуальным кажется перейти к моделям, позволяющим отказаться от предписанных α - и ω -эффектов, что возможно при решении трехмерных МГД уравнений в неосесимметричном приближении (см. глава 4).

3.8 Выводы

1. Рассмотрена модель $\alpha\omega$ -динамо для жидкого ядра Земли. Показано, что небольшое увеличение интенсивности конвекции в жидком ядре Земли может приводить к смене режимов генерации магнитного поля, и как следствие – появлению периодов с частыми или редкими инверсиями поля.
2. Показано, что турбулентность в земном ядре в состоянии обеспечить под действием силы Кориолиса величину α -эффекта, необходимую для генерации магнитного поля. Дана оценка величин α - и ω -эффектов для жидкого ядра Земли.

3. Предложена модель подавления спиральности магнитным полем для планетарных динамо, когда магнитная энергия может быть на несколько порядков больше, чем кинетическая энергия движений. Результаты апробированы на ряде планет и спутников Солнечной системы.

Глава 4

Тепловая конвекция и динамо в жидком ядре Земли в приближении Буссинеска

Стремительный рост компьютерных возможностей в 90-е годы позволил прямое численное моделирование процессов динамо в жидком ядре Земли уже в неосесимметричном случае. Поскольку даже небольшие отклонения от осевой симметрии позволяют обойти ограничение теоремы Каулинга, то появилась возможность отказаться от введения предписанных α - и ω -эффектов, и решить задачу самосогласованно. Обычно, в данных моделях в качестве заданных величин фигурируют тепловые источники, являющиеся источником конвекции. Если возникшая конвекция достаточно интенсивная и обладает требуемой топологией, то становится возможной генерация магнитного поля. В свою очередь, по мере роста, магнитное поле посредством сил Лоренца начинает оказывать обратное влияние на течение. Данные модели предусматривают учет внутреннего ядра.

К началу реализации данной модели существовало лишь очень ограниченное число моделей такого класса [9, 93], (см., также, обзор в [94]). Данные модели на примере достаточно узкого диапазона параметров показали принципиальную возможность генерации магнитного поля механизмом теплового динамо. Однако, используемые в данных моделях параметры остаются все еще далеки от наблюдаемых, и стоит вопрос о нахождении новых методов, позволяющих приблизиться к более реалистичным режимам. Другой особенностью первых работ по неосесимметричному моделированию было использование очень близких численных методов. Поскольку, начиная с некоторого уровня сложности, проверка полученных решений может быть проведена лишь сравнением полученных результатов с другими моделями, то возник вопрос о разработке новых алгоритмов.

В данной главе будут рассмотрены два новых подхода в решении задачи теплового динамо в жидком ядре Земли с учетом свободно вращающегося твердого ядра и показана принципиальная возможность воспроизведения ряда наблюдаемых геофизических явлений: инверсий геомагнитного поля, спектра магнитного поля, восточного направления вращения твердого ядра и ряда других явлений. Особое внимание будет уделено описанию ряда тестов, проводимых при разработке данной программы. В силу достаточной простоты используемых численных методов удалось рассмотреть большое число режимов на

временах много больших характерных времен процессов.

4.1 Основные уравнения

Конвекция в жидком ядре Земли ($r_1 < r < r_0$) радиуса $L = r_0$, (рис. 4.1) вращающемся с угловой скоростью Ω

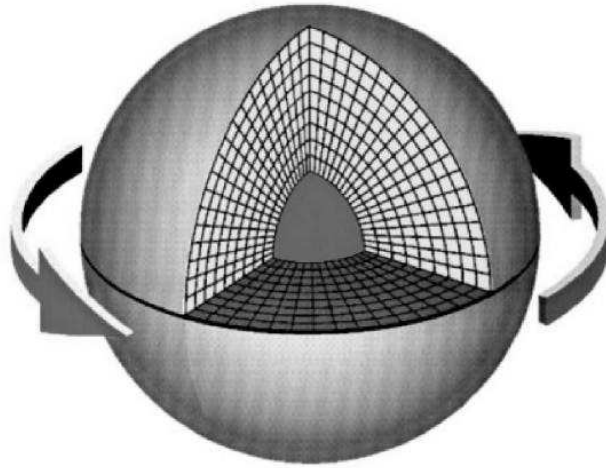


Рис. 4.1: Жидкое ($r_1 < r < r_0$) и твердое ($0 < r < r_1$, $r_1 = 0.35L$) ядро Земли. Задача тепловой конвекции (4.1–4.2) решается в области жидкого ядра, а уравнение индукции (4.3) во всем ядре ($0 < r < r_0$).

вокруг вертикальной оси \mathbf{z} , может быть описана системой уравнений Буссинеска в безразмерном виде, включающих в себя уравнение движения несжимаемой жидкости ($\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$):

$$Ro \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right) = -\nabla p + \mathbf{F} + E \Delta \mathbf{V} \quad (4.1)$$

с нулевыми граничными условиями для поля скорости \mathbf{V} на границах жидкого ядра и уравнение для отклонений

поля температуры T от равновесного профиля температуры T_o , ($\Delta T_o = 0$):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\mathbf{V} \cdot \nabla(T + T_o) + q\Delta T. \quad (4.2)$$

Проблема выбора формы T_o рассмотрена в разделе 4.4. Далее, если это не оговорено специально, нами использовано распределение вида: $T_0 = \frac{r_1/r-1}{1-r_1}$, соответствующее условию постоянства температуры на границах жидкого ядра [95]. Генерация магнитного поля описывается уравнением индукции

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) + \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (4.3)$$

В качестве единиц измерения приняты следующие величины: для скорости \mathbf{V} , магнитного поля \mathbf{B} , давления P и времени $t - \eta/L$, $\sqrt{2\Omega\eta\mu_o\rho}$, $\rho\eta^2/L^2$ and L^2/η , соответственно, где η – коэффициент магнитной вязкости, ρ – плотность, $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн м⁻¹ – магнитная постоянная, $Ro = \eta/2\Omega L^2$ – число Россби, $E = \nu/2\Omega L^2$ – число Экмана, $q = \kappa/\eta$ – число Робертса, ν – коэффициент кинематической вязкости, κ – коэффициент теплопроводности. Суммарная сила \mathbf{F} включает силу Кориолиса, Архимедовскую и Лоренцову силы:

$$\mathbf{F} = -\mathbf{1}_z \times \mathbf{V} + qR_a T r \mathbf{1}_r + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \quad (4.4)$$

где (r, θ, φ) – сферическая система координат, $\mathbf{1}_z$ – единичный вектор вдоль оси вращения и $R_a = \alpha g_o \delta T L / 2\Omega \kappa$

– модифицированное число Рэлея, α – коэффициент объемного расширения, δT – разность температуры на границах жидкого ядра и g_0 – ускорение свободного падения при $r = r_0$.

В общем случае, внутреннее твердое ядро ($r \leq r_i$) может вращаться под действием вязкого и магнитного моментов τ вокруг вертикальной оси \mathbf{z} . Угловая скорость вращения твердого ядра ω может быть найдена из закона сохранения углового момента:

$$RoI \frac{\partial \omega}{\partial t} = r_i \oint_S \tau_{r\varphi} \Big|_{r=r_i} \sin \theta dS, \quad (4.5)$$

где $I = \frac{8}{15} \pi r_i^5$ – момент инерции внутреннего ядра относительно оси \mathbf{z} , S – поверхность твердого ядра и компоненты тензора напряжения τ определены как

$$\tau_{r\varphi} = E \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi}{r} \right) + B_r B_\varphi \sin \theta, \quad (4.6)$$

причем обычно $V_r = 0$ на твердой границе.

Система уравнений (4.1–4.5) замыкается условиями непроникновения и непроскальзывания для поля скорости на твердых границах, нулевыми граничными условиями для возмущения поля температуры и вакуумными граничными условиями для магнитного поля. Поскольку проводимость твердого ядра принимается равной проводимости жидкого ядра, то дополнительные граничные условия для магнитного поля на границе твердого ядра не требуются.

4.2 2.5-мерные модели

Первым шагом на пути создания неосесимметричных моделей динамо было построение моделей, позволяющих воспроизвести отклонения полей от осевой симметрии с небольшим разрешением¹. Практически дело сводилось к небольшому числу свобод в азимутальном направлении (φ) по отношению к двум другим направлениям – радиальному, r и меридианальному, θ . Для этой цели в спектральных моделях число используемых базисных функций в азимутальном направлении бралось в 10 – 30 раз меньше, чем в других направлениях. Такое приближение хорошо коррелирует с гипотезой МАК волн Брагинского [40]. Данный подход позволил существенно сократить требуемые вычисления и увеличить длительность получаемых модельных рядов [96] и обзор в [94]. Для примера отметим, что полные трехмерные вычисления [9, 93, 11] по длительности были в 10 – 10² раз короче, чем в моделях 2.5.

Как уже отмечалось выше, известные нам модели динамо отличаются сходством используемых методов. В случае моделей 2.5 такое сходство было чрезвычайным: все модели являлись чисто спектральными, а используемые численные методы оказывались очень близкими [97].

Ниже рассмотрен принципиально новый спектрально-сеточный подход, позволяющий в некоторых случаях сократить объем вычислений. Разработанные алгоритмы и

¹Это послужило введению названия модели 2.5

программы позволили моделировать процессы тепловой конвекции и динамо с учетом твердого ядра Земли в достаточно широком диапазоне параметров на больших временах и повторить ряд известных в геомагнетизме наблюдательных фактов: направления вращения твердого ядра относительно мантии, инверсий геомагнитного поля, преобладания магнитной энергии над кинетической.

4.2.1 Спектрально-сеточный подход

Для численной реализации разложим векторное \mathbf{F} и скалярное поле F в ряд Фурье по азимутальной координате φ :

$$\mathbf{F}(r, \theta, \varphi, t) = \begin{pmatrix} F_r \\ F_\theta \\ F_\varphi \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^M \begin{pmatrix} F_r^{cm} \\ F_\theta^{cm} \\ F_\varphi^{cm} \end{pmatrix} \cos m\varphi + \begin{pmatrix} F_r^{sm} \\ F_\theta^{sm} \\ F_\varphi^{sm} \end{pmatrix} \sin m\varphi, \quad (4.7)$$

$$F(r, \theta, \varphi, t) = \sum_{m=0}^M F^{cm} \cos m\varphi + F^{sm} \sin m\varphi, \quad (4.8)$$

где коэффициенты F^m зависят от двух других сферических координат r, θ . Подстановка разложений (4.7–4.8) для каждого из вычисляемых физических полей в систему (4.3–4.5) дает систему из $2M$ конечно-разностных уравнений относительно F^{cm} и F^{sm} . Для вычисления B_r ком-

поненты используется условие бездивергентности магнитного поля $\nabla \cdot \mathbf{V} = \mathbf{0}$. Производные по координате φ вычисляются аналитически, а для аппроксимации производных по координатам r и θ используются центральные аппроксимации второго порядка точности. Для аппроксимации производной по времени используются формулы Эйлера первого порядка точности, продемонстрировавшие наибольшую устойчивость. Для решения системы линейных уравнений выбран метод Гаусса-Зейделя.

Для вычисления нелинейных членов потребовалось вывести так называемые *правила выбора*, позволяющие вычислить коэффициенты ряда Фурье функции, заданной произведением двух рядов Фурье². Пусть

$$\begin{aligned} f &= \sum_{m=0}^M f_m^c \cos m + f_m^s \sin m, \\ g &= \sum_{k=0}^M g_k^c \cos k + g_k^s \sin k, \end{aligned} \quad (4.9)$$

тогда

$$\begin{aligned} w &= f \cdot g = \\ & \sum_{m=0}^M f_m^c \cos m \cdot \sum_{k=0}^M g_k^c \cos k + \sum_{m=0}^M f_m^c \cos m \cdot \sum_{k=0}^M g_k^s \sin k + \\ & \sum_{m=0}^M f_m^s \sin m \cdot \sum_{k=0}^M g_k^c \cos k + \sum_{m=0}^M f_m^s \sin m \cdot \sum_{k=0}^M g_k^s \sin k. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Требуется найти выражения для w^c , w^s как функций

²Напомним, что термин *правила выбора* (*selection rules*) был введен в работе [98] для аналогичного разложения по сферическим гармоникам.

f^c, f^s, g^c, g^s . После преобразований имеем:

$$\begin{aligned}
w_0^c &= \frac{1}{2}(f_0^c g_0^c + \sum_{m=0}^M [f_m^c g_m^c + f_m^s g_m^s]), \\
\text{для } 0 < p \leq M : w_p^c &= \frac{1}{2}(\sum_{m=p}^M [f_m^c g_{m-p}^c + f_m^s g_{m-p}^s] + \\
&\sum_{m=0}^{M-p} [f_m^c g_{m+p}^c + f_m^s g_{m+p}^s] + \sum_{m=0}^p [f_m^c g_{p-m}^c - f_m^s g_{p-m}^s]),
\end{aligned} \tag{4.11}$$

И для синус компоненты:

$$\begin{aligned}
w_0^s &= 0, \\
\text{для } 0 < p \leq M : w_p^s &= \frac{1}{2}(\sum_{m=0}^p [f_m^c g_{p-m}^s + f_m^s g_{p-m}^c] + \\
&\sum_{m=p}^M [-f_m^c g_{m-p}^s + f_m^s g_{m-p}^c] - \sum_{m=0}^{M-p} [-f_m^c g_{m+p}^s + f_m^s g_{m+p}^c]).
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Аналогично для $w = f \cdot g'$:

$$\begin{aligned}
w_0^c &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^M m [f_m^c g_m^s - f_m^s g_m^c], \\
\text{для } 0 < p \leq M : w_p^c &= \frac{1}{2}(\sum_{m=p}^M (m-p)[f_m^c g_{m-p}^s - f_m^s g_{m-p}^c] + \\
&\sum_{m=0}^{M-p} (m+p)[f_m^c g_{m+p}^s - f_m^s g_{m+p}^c] + \\
&\sum_{m=0}^p (p-m)[f_m^c g_{p-m}^s + f_m^s g_{p-m}^c]),
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$w_0^s = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{для } 0 < p \leq M : w_p^s = & \frac{1}{2} \left(\sum_{m=0}^p (p-m) [-f_m^c g_{p-m}^c + f_m^s g_{p-m}^s] + \right. \\ & \sum_{m=p}^M (m-p) [f_m^c g_{m-p}^c + f_m^s g_{m-p}^s] - \\ & \left. \sum_{m=0}^{M-p} (m+p) [f_m^c g_{m+p}^c + f_m^s g_{m+p}^s] \right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Полученные выражения для коэффициентов w использовались для аппроксимации всех членов, содержащих произведение двух полей.

Несмотря на то, что и поле скорости, и магнитное поле бездивергентны, существует принципиальное различие в трактовке этого свойства полей. Условие бездивергентности для магнитного поля является лишь начальным условием, т.к. после преобразований векторной алгебры правую часть уравнения (4.3) можно представить в виде ротора функции. Поскольку дивергенция ротора всегда равна нулю, то при задании начального бездивергентного магнитного поля, поле и в дальнейшем останется бездивергентным. Для уравнения Навье-Стокса (4.1) ситуация обстоит по-другому. Во-первых, существует градиентный член с давлением и уравнение, вообще говоря, нельзя привести к роторной форме; во-вторых, необходимо дополнительное уравнение для вычисления давления. Для этой цели как раз и используется условие нераз-

рывности. Несмотря на то, что с формальной точки зрения задача определена – у нас четыре неизвестных: три компоненты поля скорости и давление, и четыре уравнения (три для компонент и условие бездивергентности), с технической точки зрения данная задача сильно неустойчива [99] и требует специальных подходов. Поэтому, для решения использован метод “fractional-step”, относящийся к классу алгоритмов предиктор-корректор [100]. Запишем поле скорости на n шаге по времени в виде суммы двух членов:

$$\mathbf{v}^n = \mathbf{U}^n + \mathbf{u}^n, \quad (4.15)$$

где \mathbf{U}^{n+1} получено интегрированием (4.1) без члена с давлением:

$$Ro \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\delta t} = -Ro(\mathbf{v}^n \cdot \nabla \mathbf{v}^n) + \mathbf{F}^n + E \nabla^2 \mathbf{v}^n \quad (4.16)$$

и граничными условиями $U_\tau^{n+1} = \delta t \partial p^n / \partial \tau + \hat{v}_\tau$ и $U_r^{n+1} = \hat{v}_r = 0$ на границах жидкого ядра. Здесь \hat{v}_τ – тангенциальная компонента скорости стенок.

На втором шаге делается коррекция скорости с учетом члена с давлением. Применяя оператор ∇ к (4.16), получаем уравнение Пуассона

$$\nabla^2 p^{n+1} = \nabla(-Ro(\mathbf{v}^n \cdot \nabla \mathbf{v}^n) + \mathbf{F}^n + E \nabla^2 \mathbf{v}^n) = (\delta t)^{-1} \nabla \cdot \mathbf{U}^{n+1}. \quad (4.17)$$

Решив его с Неймановскими граничными условиями $\partial p^{n+1} / \partial r = 0$, имеем поправку для поля скорости

$$\mathbf{u}^{n+1} = -\delta t \nabla p^{n+1}. \quad (4.18)$$

Легко проверить, что полученное решение удовлетворяет условию несжимаемости и исходному уравнению Навье-Стокса (4.1).

Помимо описанных в разделе 4.1 физических граничных условий, использование сферической системы координат требует введения дополнительных граничных условий в центре и на оси \mathbf{z} . Поскольку, только магнитное поле вычисляется в твердом ядре, то условие в центре необходимо лишь для него. Для этой цели мы ввели преобразование переменных вида $\mathbf{b} = r\mathbf{B}$, которое приводит к нулевым граничным условиям для \mathbf{b} при $r = 0$. Условие на оси следует из условия непрерывности полей в декартовой системе координат (аналитичности) при $\theta \rightarrow 0, \theta \rightarrow \pi$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_r^m}{\partial \theta} = F_\theta^m = F_\varphi^m = 0, & \quad \text{для } m = 0, \\ F_r^m = \frac{\partial F_\theta^m}{\partial \theta} = \frac{\partial F_\varphi^m}{\partial \theta} = 0, & \quad \text{для } m = 1, \\ F_r^m = F_\theta^m = F_\varphi^m = 0, & \quad \text{для } m > 1. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Спецификой задачи генерации магнитного поля в области, окруженной непроводящей средой, является использование вакуумных граничных условий для магнитного поля. Реализация этих условий в рамках конечно-разностных методов существенно отличается от традиционно используемых в спектральных методах подходов. Поэтому мы рассмотрим этот вопрос подробнее. Идея заключается в следующем. Поскольку для вычисления B_r -компоненты используется условие бездивергентности, то

граничное условие на внешней границе не требуется:

$$\begin{aligned} b_r^{mc} &= -\frac{1}{r \sin \theta} \int_0^r \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta b_\theta^{cm}) + m b_\varphi^{sm} \right) dr, \\ b_r^{ms} &= -\frac{1}{r \sin \theta} \int_0^r \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta b_\theta^{sm}) - m b_\varphi^{cm} \right) dr. \end{aligned} \quad (4.20)$$

На внешней границе магнитное поле непрерывно, потенциально и подчиняется уравнению Лапласа:

$$\mathbf{b} = -r \nabla U, \quad (4.21)$$

где U – скалярный потенциал (см., например, [101, 102]). Решение уравнения (4.21) может быть представлено в виде ряда

$$U = \sum_{l=1}^M \sum_{m=0}^l (g_l^m \cos m\varphi + h_l^m \sin m\varphi) P_l^m(\cos \theta) \left(\frac{1}{r} \right)^{l+1}, \quad (4.22)$$

где P_l^m – присоединенные полиномы Лежандра, а g_l^m , h_l^m – коэффициенты Гаусса. В свою очередь выражения для компонент имеют вид:

$$\begin{aligned} b_r &= \sum_{l=1}^M \sum_{m=0}^l (g_l^m \cos m\varphi + h_l^m \sin m\varphi) P_l^m(\cos \theta) (l+1), \\ b_\vartheta &= -\sum_{l=1}^M \sum_{m=0}^l (g_l^m \cos m\varphi + h_l^m \sin m\varphi) \frac{d}{d\vartheta} P_l^m(\cos \vartheta), \\ b_\varphi &= \frac{1}{\sin \theta} \sum_{l=1}^M \sum_{m=0}^l m (g_l^m \sin m\varphi - h_l^m \cos m\varphi) P_l^m(\cos \vartheta). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Используя условие ортогональности полиномов Лежандра P_l^m можно определить значения коэффициентов Гаусса g_l^m, h_l^m .

$$g_l^m = \frac{\int_0^\pi b_{rm}^c P_l^m(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta}{(l+1) \int_{-1}^{+1} P_l^{m2}(\mu) d\mu}, \quad h_l^m = \frac{\int_0^\pi b_{rm}^s P_l^m(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta}{(l+1) \int_{-1}^{+1} P_l^{m2}(\mu) d\mu}. \quad (4.24)$$

После чего, используя (4.23), можно определить тангенциальное магнитное поле (b_θ, b_φ) .

4.2.2 Тесты

Свободные моды затухания. Для тестирования программы были использованы многочисленные аналитические результаты. Каждое из уравнений было проверено на свободные моды затухания.

Рассмотрим тест на свободные моды затухания для магнитного поля. Для магнитного поля известно, что при отсутствии течения магнитное поле должно экспоненциально убывать с известными декрементами γ_a (см., например, [2, 45]). Поскольку такое решение при убывании продолжает сохранять пространственное распределение, то используя такое решение в качестве начального, удобно следить за его эволюцией [103]. Для переменной \mathbf{b} точное

выражение для собственной функции имеет вид:

$$\mathbf{b}^{decay} = e^{-k_l^2 t} \left(\begin{array}{c} (l+1)l j_l(k_l r) P_l^m(\cos \theta) \cos m\varphi, \\ -\frac{r}{\sin \theta} j_{l-1}(k_l r) m P_{l-1}^m(\cos \theta) \sin m\varphi + \\ \cos m\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} P_l^m(\cos \theta) \\ (r j_{l-1}(k_l r) k_l - j_l(k_l, m r)), \\ -r j_{l-1}(k_l r) \cos m\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} P_{l-1}^m(\cos \theta) - \\ \frac{m \sin m\varphi}{\sin \theta} P_l^m(\cos \theta) (r j_{l-1}(k_l r) k_l - j_l(k_l r)) \end{array} \right), \quad (4.25)$$

где k_l корни сферических функций Бесселя j_l , здесь $l = 1, \dots, \infty$ и для $l = 1$ член с индексом $(l-1)$ опускается в силу отсутствия монополей магнитного поля.

Для тестирования программы в качестве начального условия использовались распределения магнитного поля, заданные (4.25). В ходе прямого интегрирования уравнения индукции (4.3) по времени мы следили за устойчивостью пространственного распределения поля и за рядом количественных характеристик. В качестве таковых мы использовали среднюю по объему энергию магнитного поля и само собственное число γ , которое в ходе вычислений определялось как:

$$\gamma = \frac{1 \int |\dot{\mathbf{B}}|^2 d\mathbf{r}^3}{2 \int |\mathbf{B}|^2 d\mathbf{r}^3}. \quad (4.26)$$

Тесты были проведены для $1 \leq l \leq 6$ и $0 \leq m \leq l$. Для функций Бесселя мы использовали первый корень. Для всех вариантов отклонения от аналитического значения стремились к нулю при увеличении числа точек сетки $(N \times K)$ как $\sim 1/(N \times K)$. Пример полученных

результатов теста на сходимость для первых $1 \leq l \leq 3$ на момент времени $t = 0.01$ приведен в таблицах 4.1-4.2. Наблюдаемая h^2 сходимость численного решения к ана-

| m | 0 | 1 | 2 | 3 |
|----------------|--------|--------|--------|--------|
| δB | -0.125 | -0.068 | -0.051 | -0.021 |
| $\delta\gamma$ | -0.052 | -0.042 | -0.024 | -0.008 |

Таблица 4.1: Отклонение от аналитического значения для средней по объему магнитной энергии δB и собственного значения γ для сетки $N \times K = 21 \times 21$.

| m | 0 | 1 | 2 | 3 |
|----------------|--------|--------|--------|--------|
| δB | -0.046 | -0.016 | -0.017 | -0.006 |
| $\delta\gamma$ | -0.013 | -0.010 | -0.007 | -0.002 |

Таблица 4.2: Отклонение от аналитического значения для средней по объему магнитной энергии δB и собственного значения γ для сетки $N \times K = 41 \times 41$.

литическому хорошо согласуется с используемой схемой аппроксимации дифференциального уравнения и может быть критерием правильности программы.

Тест на кинематическое динамо. В общем случае, когда $\mathbf{V} \neq 0$, аналитическое решение уравнения индукции (4.3) не существует, и требуется сравнение с численными результатами. Для этой цели была использована модель Габбинса [104] (см., также [105]). Для удобства сравнения с использованной в [104, 105] формой представления, введем новые обозначения.

Представим поле скорости в виде суммы тороидальной

и полоидальной частей:

$$\mathbf{V} = \mathbf{T} + \mathbf{S} = \nabla \times (T\mathbf{e}_r) + \nabla \times \nabla \times (S\mathbf{e}_r). \quad (4.27)$$

Данные поля можно разложить в ряд по сферическим функциям $Y_{l,m}$:

$$\mathbf{V} = \mathbf{T} + \mathbf{S} = \sum_{l,m} (\mathbf{T}_l^m + \mathbf{S}_l^m). \quad (4.28)$$

Тогда

$$T_{r,l}^m = 0, \quad T_{\theta,l}^m = \frac{T(r)}{r \sin \theta} \frac{\partial Y_{l,m}}{\partial \varphi}, \quad T_{\varphi,l}^m = -\frac{T(r)}{r} \frac{\partial Y_{l,m}}{\partial \theta},$$

$$S_{r,l}^m = \frac{l(l+1)}{r^2} S(r) Y_{l,m}, \quad S_{\theta,l}^m = \frac{1}{r} \frac{\partial S(r)}{\partial r} \frac{\partial Y_{l,m}}{\partial \theta},$$

$$S_{\varphi,l}^m = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial S(r)}{\partial r} \frac{\partial Y_{l,m}}{\partial \varphi}. \quad (4.29)$$

В тесте Габбинса [104] использовалось поле скорости вида:

$$\mathbf{V} = R_m (\mathbf{T}_2^0 + \epsilon \mathbf{S}_2^0), \quad (4.30)$$

с $\epsilon = 0.1$ and

$$T_2^0(r) = S_2^0(r) = -r^2 \sin(2\pi r) \tanh(2\pi(1-r)). \quad (4.31)$$

Тогда в сферической системе координат поле скорости \mathbf{V}

имеет вид:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} -3\epsilon \sin(2\pi r) \tanh(2\pi(1-r))(3 \cos^2 \theta - 1), \\ \frac{3}{2}\epsilon [2 \sin(2\pi r) + \tanh(2\pi(1-r)) + \\ 2\pi r \cos(2\pi r) \tanh(2\pi(1-r)) - \\ 2\pi r \sin(2\pi r) \cosh^{-2}(2\pi(1-r))] \sin 2\theta, \\ -\frac{3}{2}r \sin(2\pi r) \tanh(2\pi(1-r)) \sin 2\theta \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

Соответствующие сечения поля в меридиональной и экваториальной плоскостях представлены на рис. 4.2. В своих расчетах Дадли и Джеймс [105], решали задачу на собственные функции и следили за началом генерации магнитного поля, увеличивая магнитное число Рейнольдса R_m . Было показано, что критическое магнитное число Рейнольдса для первой неосесимметричной моды ($m=1$) имеет значения $R_m = 54.7$ и -96.7 . При этом в своих расчетах они использовали 20 сферических функций и 100 точек по r -направлению. В свою очередь в наших расчетах были получены значения $R_m = 55.8, -90.2$ для сетки $(r, \theta, \varphi) - 23 \times 23 \times 1$ и $R_m = 54.8, -93.5$ для сетки $45 \times 45 \times 1$. Мы также сделали дополнительные расчеты для сетки $89 \times 89 \times 1$ и получили $R_m = -96.0$. Мы расцениваем полученное согласие результатов как хорошее. Также было проведено детальное сравнение пространственного распределения полученного магнитного поля (см. рис. 4.2) с результатами расчетов программы, разработанной в Потсдамском Астрофизическом институте с использованием других методов. Пространственные распределения оказа-

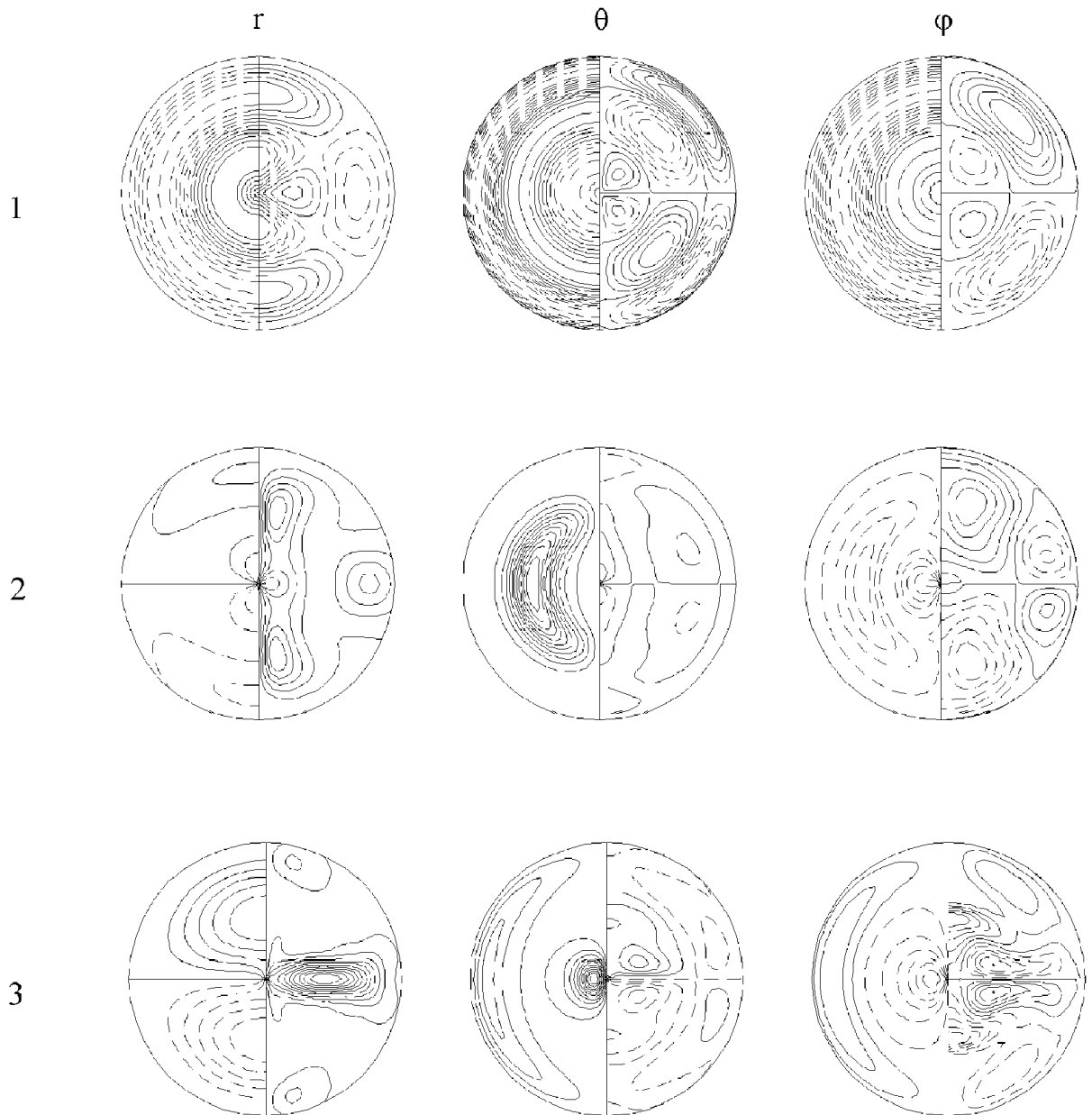


Рис. 4.2: Изолинии r -, θ - и φ -компонент поля скорости (1) и магнитного поля (2) для $R_m = 55$ и (3) для $R_m = -95$.

лись очень близкими.

Аналогичный тесты были проделаны для полоидальной и тороидальной компонент поля скорости в уравнении Навье-Стокса (см. Приложение Е), а также для уравнения температуры. Тесты продемонстрировали квадратичную сходимость решения к аналитическому с увеличением числа точек. В качестве дополнительного теста был использован тест на критическое число Рэлея для сферической оболочки. Для системы с такой геометрией существуют асимптотические оценки [8]. Тесты были успешны [106].

4.2.3 Задача Стюартсона

Прежде чем перейти к моделированию самосогласованной задачи динамо мы рассмотрим пример решения классической задачи Стюартсона [107] с наложенным магнитным полем.

Пусть внутреннее ядро вращается с несколько отличной (заданной) угловой скоростью, чем вся система в целом вокруг оси \mathbf{z} (см. рис. 4.1). Тогда известно [107, 108], что возникает, так называемый, стюартсоновский слой. Этот слой имеет цилиндрическую, осесимметричную форму с осью вращения, совпадающей с осью \mathbf{z} , и охватывающий внутреннее ядро (т.е. имеет радиус r_i). Стюартсоновский слой был неоднократно исследован аналитическими методами, и было показано [107, 108], что его толщина порядка $\delta \sim E^{1/3}$. Поскольку значения числа Экмана в Зем-

ле очень малы ($E \sim 10^{-15}$), то существование таких слоев весьма актуально для моделирования процессов геодинamo. Действительно, если стюартсоновский слой существует, то в расчетах необходимо разрешать масштабы порядка $\delta \sim 10^{-5}$. И хотя необходимым локальным сгущением сетки такую детализацию теоретически и можно достичь, с технической точки зрения задача едва ли реализуема. С другой стороны, есть основания ожидать, что наличие архимедовских и магнитных сил может привести к разрушению слоев Стюартсона, и таким образом упростить задачу. Впервые на такую возможность указал в своих работах Холлербах [109]. Далее этот вопрос неоднократно исследовался как теоретически [110, 111], так и численно [112, 113]. В целом ответ был положительный: наличие магнитного поля может приводить к разрушению стюартсоновских слоев. Однако, в ходе исследований [113] было показано, что введение магнитного поля может приводить к ранее неизвестному эффекту, так называемому *эффекту супервращения*. Оказывается, что при наличии магнитного поля в экваториальной области вблизи внутреннего ядра появляется область, где жидкость движется с угловой скоростью, превышающей угловую скорость вращения твердого ядра. Для сравнения отметим, что в задаче без магнитного поля максимальная скорость жидкости (в силу условия непроскальзывания) соответствует скорости вращения твердого ядра. Вопрос о *супервращении* весьма важен, поскольку в случае полной модели, ко-

гда ядро может свободно вращаться под действием вязких сил, наличие градиента угловой скорости жидкости приводит к закручиванию внутреннего ядра.

Далее мы рассмотрим задачу, в которой жидкость движется за счет заданного дифференциального вращения твердых стенок, окружающих жидкое ядро. Накладывая архимедовские силы, мы исследуем насколько слои Стюарта чувствительны к таким силам. Также мы рассмотрим, что происходит с системой в случае наложенного магнитного поля.

Рассматривая данную задачу, мы преследовали две цели. Во-первых, оценить возможности разработанной программы. Поскольку есть основания считать, что сеточные методы для решения задач с резкими слоевыми структурами более устойчивы [114], чем спектральные, то применение описанного в подразделе 4.2.1 разработанного подхода было весьма привлекательно. Во-вторых, необходимо было более детально исследовать эффект супервращения. Так, в работе [113] было сделано предположение о малости генерируемого магнитного поля, что вообще говоря, не всегда реализуемо, и требовались дополнительные исследования.

Математическая формулировка. Пусть внешняя твердая граница жидкого ядра ($r = r_0$) (рис. 4.1) вращается с угловой скоростью $\Omega > 0$, а твердое ядро с угловой скоростью ω_i : $0 < \frac{\omega_i - \Omega}{\Omega} \ll 1$. Движение жидкости в сферической обо-

лочке в системе отсчета, связанной с $r = r_0$, подчиняется уравнению Навье-Стокса (см. единицы измерения в подразделе 4.1):

$$R_o \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla p + \mathbf{F} - (\mathbf{1}_z \times \mathbf{V}) + E \nabla^2 \mathbf{V}. \quad (4.33)$$

Поскольку далее нас будет интересовать лишь стационарное решение, и интегрирование по времени производится до момента установления решения, инерционный член в (4.33) опущен.

В случае наложенного магнитного поля \mathbf{B}_0 в области жидкого ядра уравнение индукции для генерируемого магнитного поля \mathbf{b} для жидкого ядра имеет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 + \mathbf{v} \times \mathbf{b}) + \nabla^2 \mathbf{b} \quad (4.34)$$

и для внутреннего проводящего ядра:

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times (r_i \omega_i \mathbf{1}_\varphi \times \mathbf{b}) + \nabla^2 \mathbf{b}. \quad (4.35)$$

Суммарная сила \mathbf{F} включает в себя архимедовскую, кориолисову и магнитную силы:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_a - (\mathbf{1}_z \times \mathbf{v}) + \mathbf{F}_L. \quad (4.36)$$

Наложённое магнитное поле \mathbf{B}_0 в жидком ядре задано диполем. С учетом потенциальности наложенного магнитного поля (его ротор равен нулю), сила Лоренца в жидком ядре имеет вид:

$$\mathbf{F}_L = (\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{B}_0 + (\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b}. \quad (4.37)$$

Уравнения (4.34–4.37) были решены описанными в подразделе 4.2.1 численными методами.

Результаты моделирования Во всех вычислениях использовалось $r_0 = 1$, $r_i = 0.4$ и $R_o = E$. Уравнения (4.34–4.37) интегрировались по времени до установления стационарного решения. В расчетах использовалась сетка (r, θ) (43×43) и предполагалось, что решение осесимметрично.

Первые расчеты были проведены без магнитного поля и архимедовских сил. Движение жидкости вызывалось лишь дифференциальным вращением твердых границ жидкого ядра ($\omega_i = 1$). Рис. 4.3 демонстрирует, что по мере уменьшения вязкости (уменьшения числа Экмана) толщина стюартсоновского слоя уменьшается. Это находится в согласии с аналитическими предсказаниями.

Далее был рассмотрен случай с наложенной архимедовской силой. Отметим, что подобный случай ранее не рассматривался. Мы рассмотрели архимедовскую силу, убывающую на границах жидкого ядра:

$$\mathbf{F}_a = F_a(r_0 - r)(r - r_i)\mathbf{1}_r. \quad (4.38)$$

Из рисунка 4.4 хорошо видно, что при увеличении архимедовской силы (правая колонка сверху вниз) происходит разрушение стюартсоновского слоя.

Следующим этапом было исследование чисто магнитной задачи (без архимедовских сил) с наложенным магнитным полем \mathbf{B}_0 в области жидкого ядра. Поскольку в расчетах мы используем для \mathbf{B}_0

$$\mathbf{B}_0 = \frac{r_i^3 B_0}{3r^3} (2\mathbf{1}_r \cos \theta + \mathbf{1}_\theta \sin \theta). \quad (4.39)$$

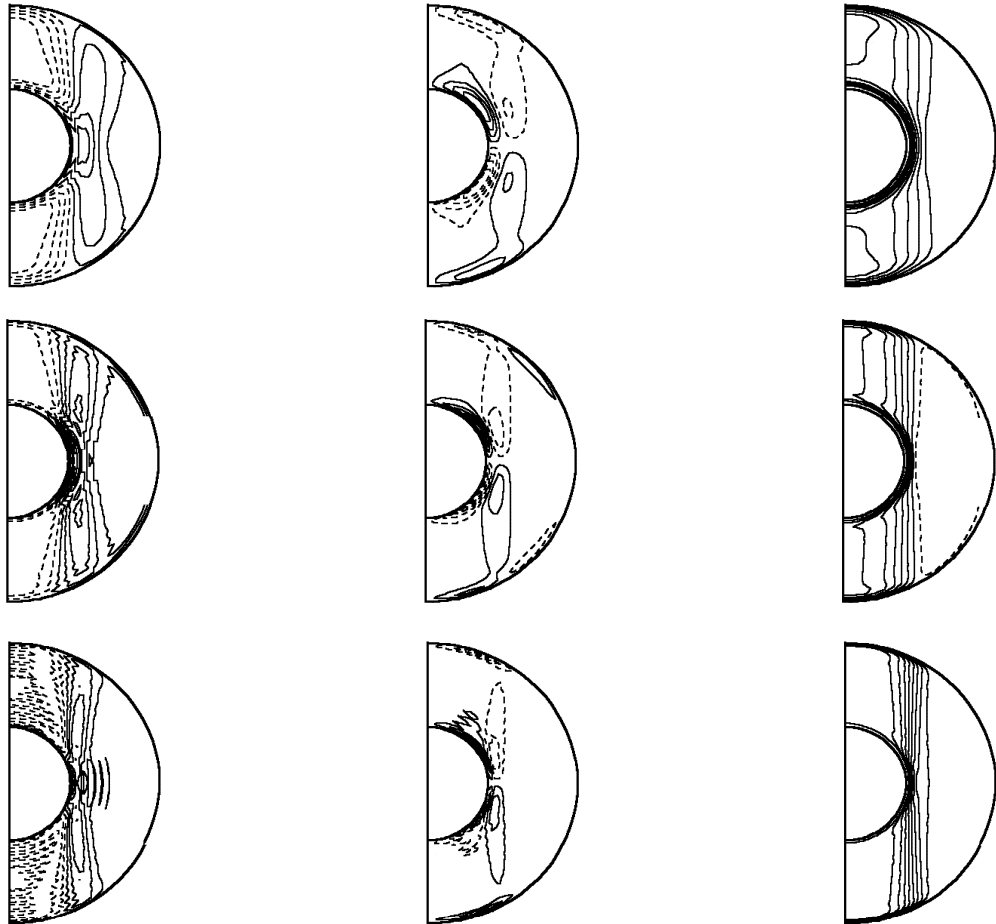


Рис. 4.3: Меридиональное сечение V_r - , V_θ -компонент скорости и угловой скорости вращения ω жидкости (слева направо) для $E = 10^{-3}$, $E = 3 \cdot 10^{-4}$ и $E = 10^{-4}$ (сверху вниз).

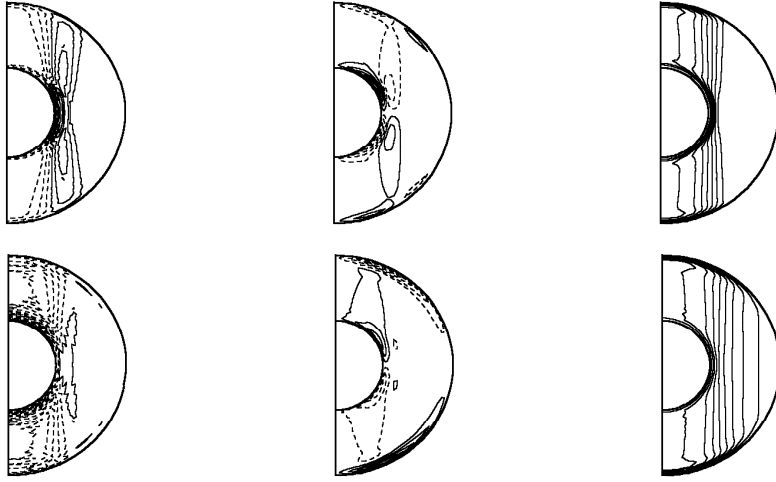


Рис. 4.4: Меридиональное сечение V_r - , V_θ -компонент скорости и угловой скорости вращения ω жидкости (слева направо) с $E = 3 \cdot 10^{-4}$ для случая с предписанной архимедовской силой. Верхняя линия соответствует $F_a = 0.3$, нижняя – $F_a = 3$.

потенциальное поле диполя, то вообще говоря, это поле, будучи потенциальным, не может воздействовать на жидкость. Однако, данное поле за счет дифференциального вращения ($\omega_i = 0.1$, $E = 3 \times 10^{-4}$) может усиливаться и уже индуцированное поле \mathbf{b} оказывает воздействие на течение. В расчетах было рассмотрено увеличивающееся влияние наложенного магнитного поля при $B_0 = 4.8, 5.4, 35.8, 44.8$. Первым был рассмотрен линеаризованный случай [113], в котором второй член в (4.37) был опущен. Данное предположение соответствует случаю, когда индуцированное магнитное поле много меньше наложенного $\mathbf{b} \ll \mathbf{B}_0$. Полученное поле скорости изображено на рис. 4.5. Как и в случае с архимедовскими сила-

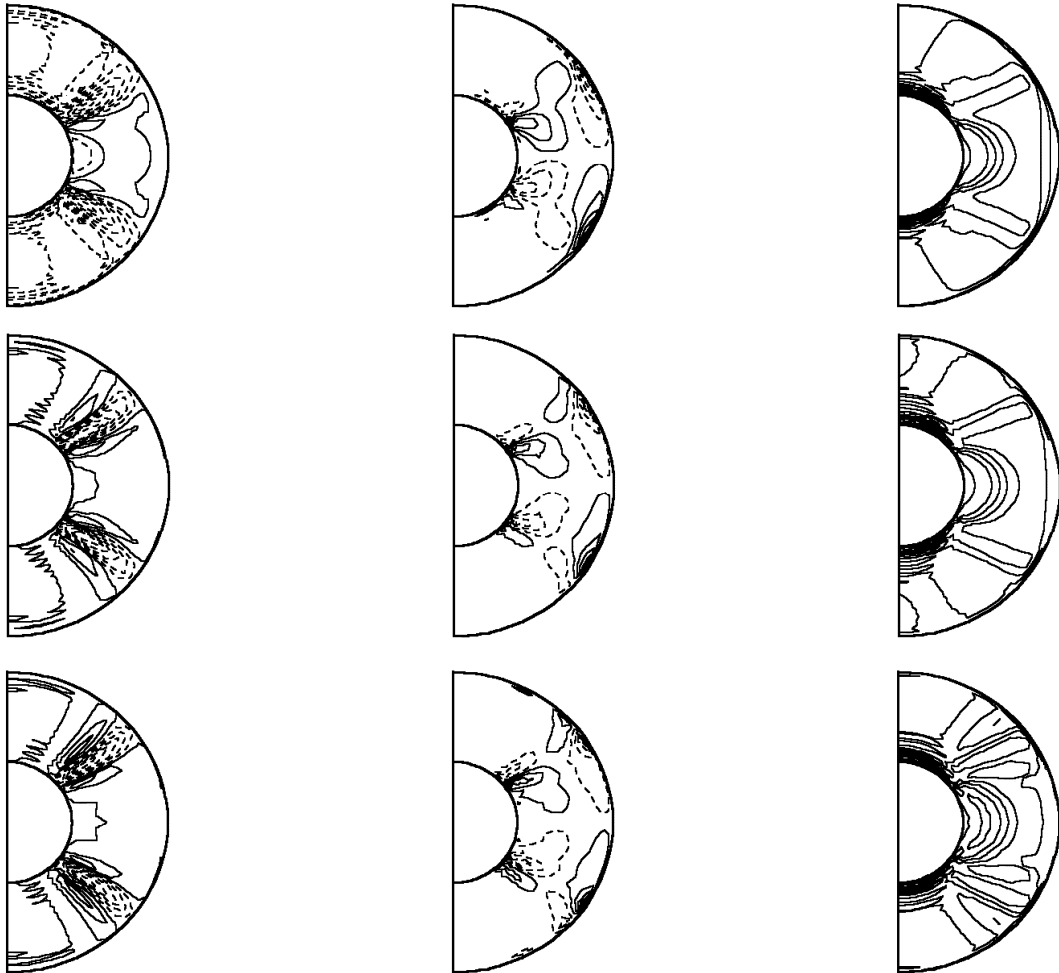


Рис. 4.5: Линеризованная модель. Меридиональное сечение V_r - , V_θ -компонент скорости и угловой скорости вращения ω жидкости (слева направо) с $E = 3 \cdot 10^{-4}$ для случая с наложенным магнитным полем. Верхняя линия соответствует $B_0 = 4.8$, средняя – $B_0 = 5.4$ и нижняя – $B_0 = 35.8$.

ми, мы наблюдаем разрушение слоевых цилиндрических структур. Поскольку в жидком ядре Земли существует магнитострофический баланс, в котором магнитные силы являются одними из главных, то есть основания считать, что стюартсоновские слои могут быть разрушены возникающими течениями.

Рассмотрим более детально вращение жидкости в экваториальной плоскости. На рис. 4.6 представлено поведение угловой скорости вращения жидкости ω как функции расстояния s от центра сферы. На рисунке хорошо виден максимум угловой скорости в области $s \sim 0.5$, который соответствует упомянутому выше эффекту супервращения. Мы видим, что при увеличении величины наложенного магнитного поля \mathbf{B}_0 , происходит насыщение, и скорость больше не изменяется при увеличении \mathbf{B}_0 . Данные вычисления хорошо согласуются с расчетами [113], в которых наблюдается сходная картина. Поскольку генерируемое магнитное поле уже начинает быть сравнимо с величиной наложенного ($\mathbf{b} \sim \mathbf{B}_0$), то рассмотренное линеаризованное приближение может быть уже не применимо, и следует учесть уже и второй член в (4.37). Результаты расчетов представлены на рис. 4.7. Как и следовало ожидать, введение дополнительного члена в силе Лоренца привело к еще большему искажению стюартсоновских слоев. Однако, наиболее существенно влияние введенной поправки отразилось на супервращении $\omega(s)$ (см. рис. 4.8). Мы видим, что увеличение наложенного

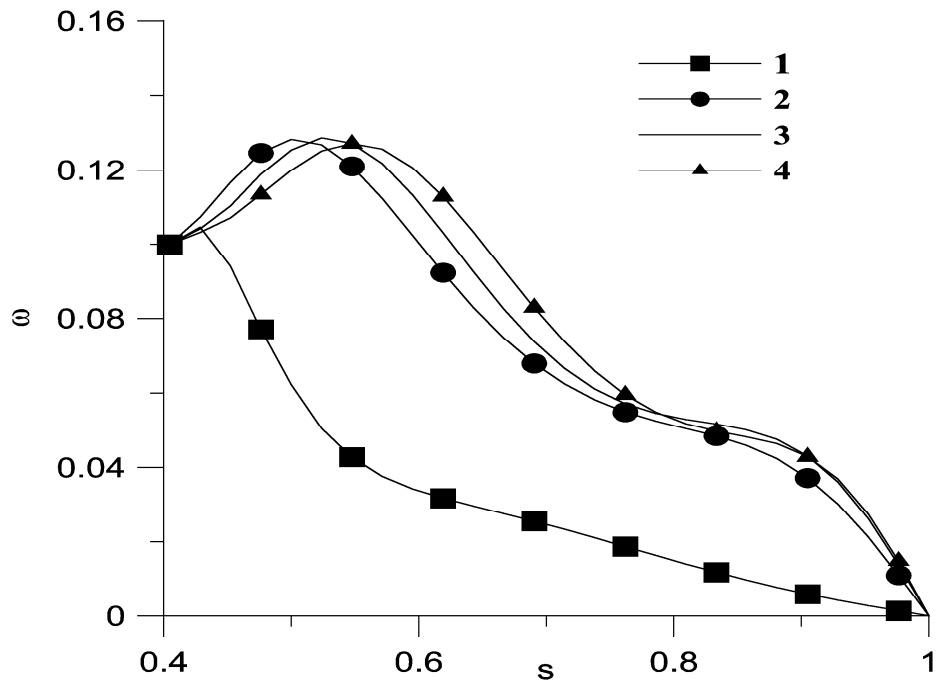


Рис. 4.6: Линеризованная модель. Зависимость угловой скорости вращения жидкости ω в экваториальной плоскости от расстояния s до центра при наложенном магнитном поле. 1 - $B_0 = 4.8$, 2 - $B_0 = 5.4$, 3 - $B_0 = 35.8$, 4 - $B_0 = 44.8$.

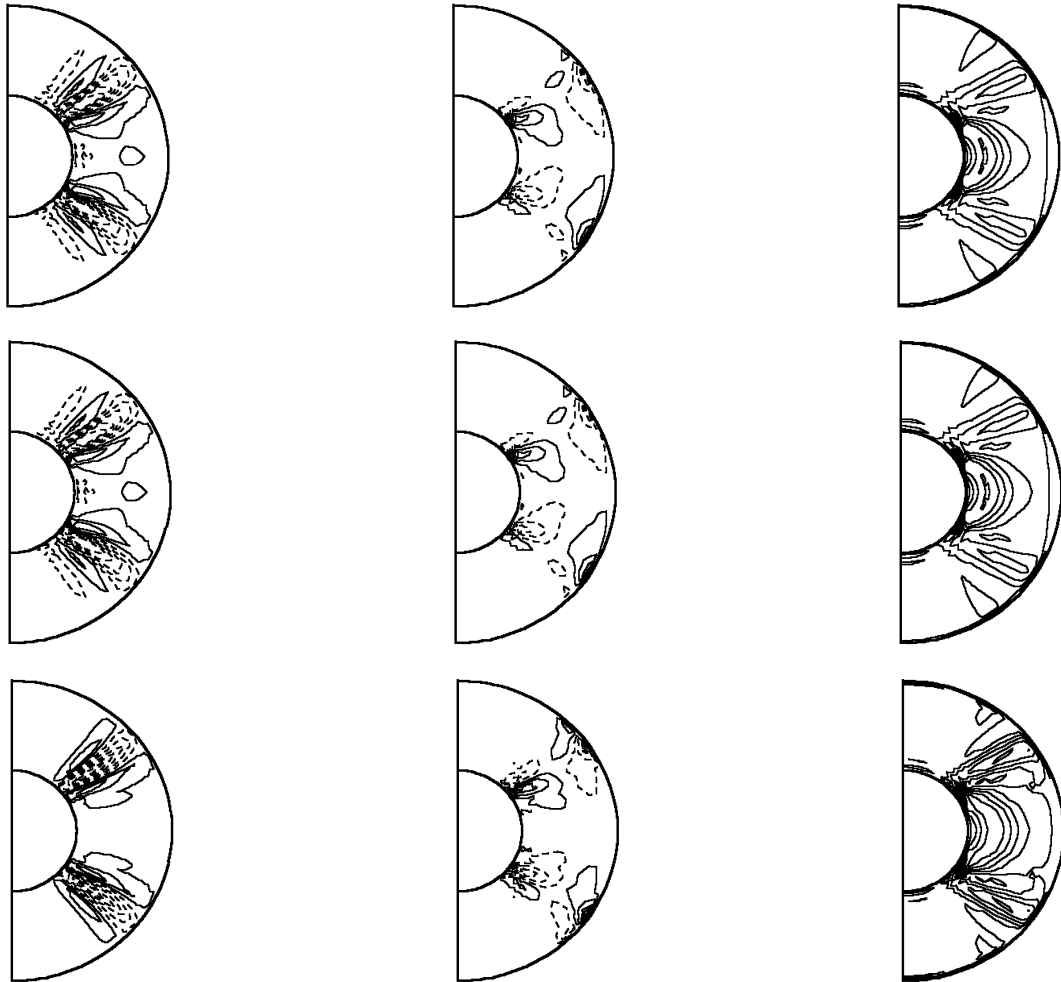


Рис. 4.7: Нелинейная модель. Меридиональное сечение компонент V_r - , V_θ - скорости и угловой скорости ω вращения жидкости (слева направо) с $E = 3 \cdot 10^{-4}$ для случая с наложенным магнитным полем. Верхняя линия соответствует $B_0 = 4.8$, средняя – $B_0 = 5.4$ и нижняя – $B_0 = 35.8$.

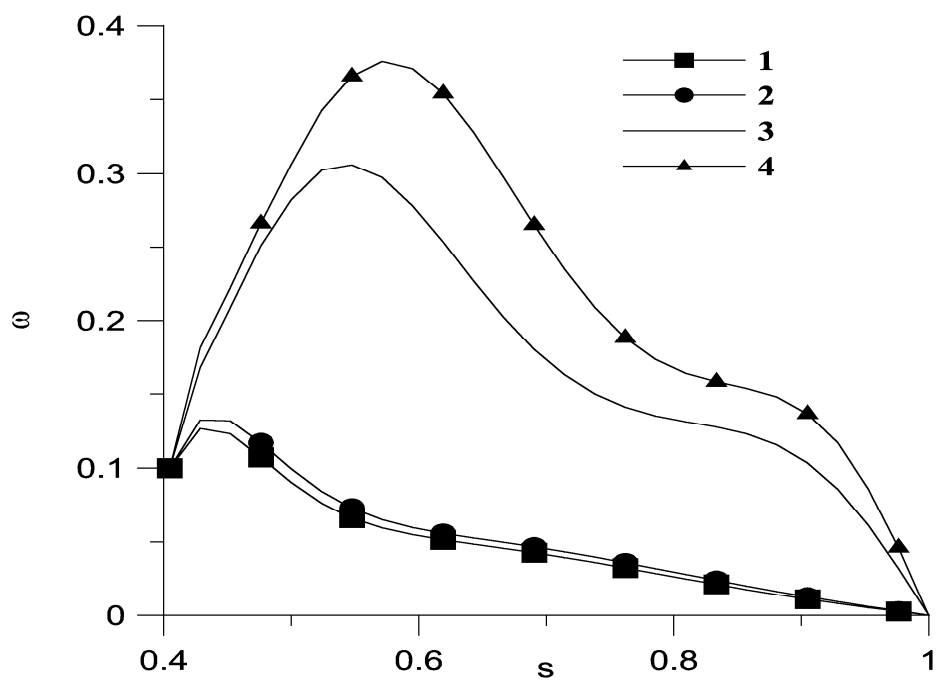


Рис. 4.8: Нелинейная модель. Зависимость угловой скорости вращения жидкости ω в экваториальной плоскости от расстояния s до центра при наложенном магнитном поле. 1 - $B_0 = 4.8$, 2 - $B_0 = 5.4$, 3 - $B_0 = 35.8$, 4 - $B_0 = 44.8$.

магнитного поля сводится к двум эффектам:

1. увеличению амплитуды угловой скорости вращения жидкости при увеличении \mathbf{B}_0 и отсутствию насыщения. Само значение ω уже превосходит значение, полученное в линейном режиме, более, чем в три раза.
2. Наблюдается сдвиг максимума угловой скорости в основной объем жидкости, что в свою очередь уменьшает градиент угловой скорости вблизи твердого ядра.

На основе проведенных расчетов можно заключить, что наличие архимедовских и магнитных сил может приводить к разрушению слоев Стюартсона. Данное обстоятельство, конечно, не снимает проблему их численного разрешения полностью (они могут появляться локально в пространстве в моменты ослабления магнитного поля), но может существенно упростить процесс моделирования.

Возникающее супервращение жидкости, имеющее магнитное происхождение, вносит вклад в дифференциальное вращение, и может быть дополнительным источником сил, закручивающих твердое ядро. Показано, что нелинейное приближение, по сравнению с линейным, дает более гладкое решение для угловой скорости, а сами амплитуды угловой скорости превосходят линейные аналоги в несколько раз.

4.2.4 Полная модель

Вернемся к решению модели тепловой конвекции со свободно вращающимся твердым ядром. Вначале рассмотрим случай без магнитного поля, описываемый уравнениями (4.1, 4.2, 4.4, 4.5). Отметим, что свободно вращающееся ядро включалось в модели очень редко [9, 93] и его роль в гидродинамике осталась малоизученной. При вычислениях было использовано (25×25) точек сетки для $r - \theta$ переменных, и первые четыре гармоники в Фурье-разложении ($m = 0 \dots M, M = 3$).

Моделирование было проведено в широком диапазоне параметров, так что $E = Ro, Ra/Ro = const$. Последнее позволяет проследить роль увеличения вращения при уменьшении E в (4.1).

Рассмотрим поведение угловой скорости вращения твердого ядра относительно наблюдателя, находящегося на поверхности жидкого ядра ($r = r_0$). Результаты моделирования приведены на рис. 4.9. Отметим, что с уменьшением E (увеличением вращения) период колебаний частоты вращения твердого ядра ω уменьшается, увеличивается амплитуда колебаний (кривые 2 и 3), однако во всех рассмотренных случаях знак ω совпадает со знаком суточного вращения Земли Ω , что соответствует восточному направлению вращения твердого ядра Земли. Если рассмотреть отношение средних по объему квадратов

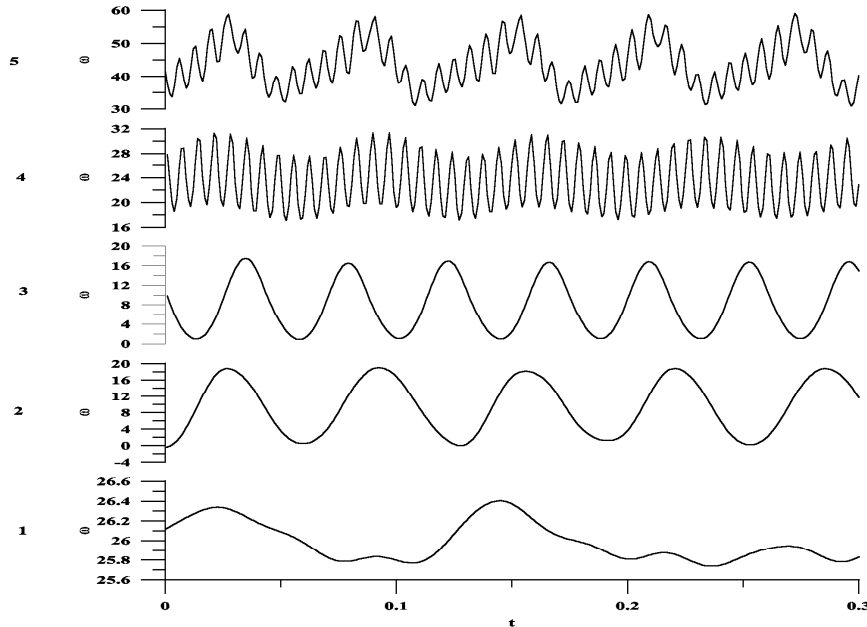


Рис. 4.9: Эволюция угловой скорости вращения твердого ядра ω для следующих режимов конвекции: 1 – $Ra = 320$, $E = 3.2 \cdot 10^{-3}$, 2 – $Ra = 105$, $E = 1.05 \cdot 10^{-3}$, 3 – $Ra = 100$, $E = 1.0 \cdot 10^{-3}$, 4 – $Ra = 45$, $E = 4.5 \cdot 10^{-4}$, 5 – $Ra = 38$, $E = 3.8 \cdot 10^{-4}$.

сил $\zeta = \sqrt{\int_{r_1}^{r_0} \mathbf{F}_a^2 dr^3 / \int_{r_1}^{r_0} \mathbf{F}_k^2 dr^3}$, то оказывается, что диапазон между верхней и нижней кривыми на рис. 4.9 соответствует $\zeta \in (10^{-3} \div 3)$.

Остановимся подробнее на полученном результате. Впервые предпочтительность восточного направления была предсказана в работах [9, 10]. Авторы назвали это явление эффектом супервращения³, поскольку полученная скорость вращения твердого ядра $\sim 2^\circ/\text{год}$ была больше скорости западного дрейфа $\sim 0.2^\circ/\text{год}$ на порядок. Всего через два

³Этот термин не имеет ничего общего с супервращением в подразделе 4.2.3!

года появились уже первые подтверждения сейсмологов [115]. Используя данные по анизотропии внутреннего ядра были получены оценки направления и скорости вращения твердого ядра, очень близкие к предсказанным. После этого было достаточно много работ по сейсмологии (см. обзор в [116, 117]), суть которых сводилась к уточнению абсолютной величины относительной угловой скорости вращения твердого ядра. Приведенные оценки колебались в пределах от нуля до величин, приведенных в работах [9, 10]. Другими словами, насколько это известно автору, работ, в которых регистрировался западный дрейф внутреннего ядра, не было. В тоже время большинство авторов склонялось к точке зрения, что наблюдаемое Глатцмайером и Робертсом супервращение твердого ядра является завышенной оценкой [118]. Оставив более детальное сравнение полученных в безразмерном виде результатов с наблюдениями до раздела 4.4, отметим лишь, что по порядку величины азимутальная скорость твердого ядра на границе с жидким $V_\varphi^1 = 0.35\omega < \sqrt{E_k}$, что скорее всего, говорит об отсутствии эффекта супервращения в смысле Глатцмайера и Робертса. Здесь r_1 – радиус твердого ядра, а E_k – кинетическая энергия системы, см. ниже.

В дополнение к немагнитному случаю была рассмотрена полная система уравнений динамо (4.3–4.5) (см. рис. 4.10). В целом, временное поведение системы с магнитным полем выглядит более сложно, чем аналогичный режим без

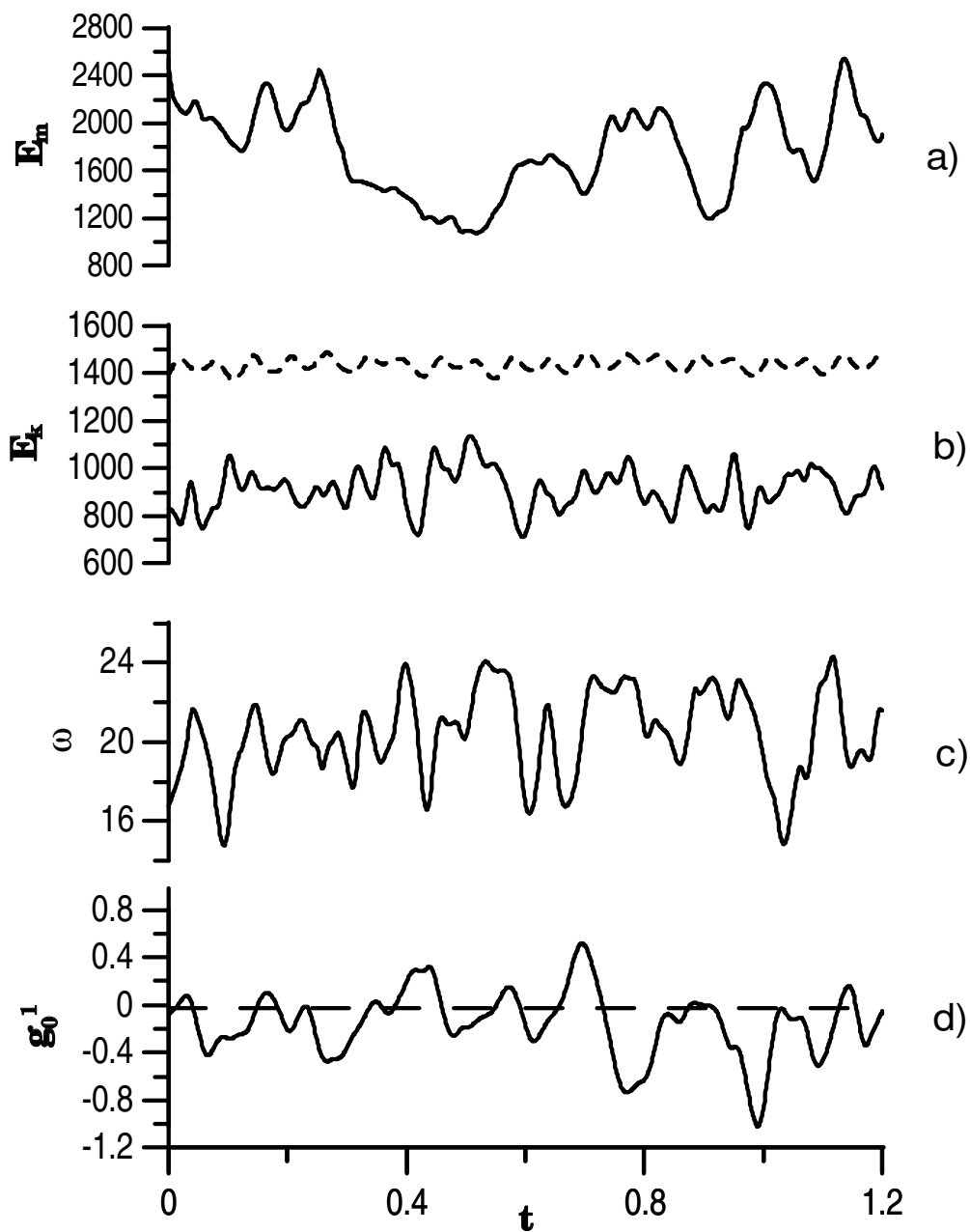


Рис. 4.10: Временная эволюция а) магнитной энергии системы $E_m \sim R_o^{-1} B^2$; б) кинетической энергии $E_k \sim v^2$ (пунктирная линия соответствует режиму без магнитного поля; в) угловой скорости вращения твердого ядра; д) магнитного диполя (g_0^1 коэффициента Гаусса) для $Ra = 320$ и $R_o = E = 3.2 \times 10^{-3}$.

учета сил Лоренца (см. рис. 4.9, кривая 1). Поведение угловой скорости вращения внутреннего ядра ω характеризуется большей изрезанностью и увеличением амплитуды колебаний. Однако, и в этом случае знак ω остается положительным. Среднее по времени и по объему отношение сил Архимеда к силам Кориолиса $\zeta = 5.3$, сил Лоренца к силам Кориолиса 0.2. Несмотря на тот факт, что магнитная энергия может превосходить кинетическую, среднее значение сил Кориолиса больше сил Лоренца. Напомним, что для Земли магнитная энергия может превосходить кинетическую на три порядка (см., например, [9]), однако это не означает, что сила Лоренца является единственно главной силой в жидком ядре. Интересным является также факт увеличения значения ζ по сравнению с немагнитным случаем в два раза, что соответствует уменьшению сил Кориолиса. Последнее связано с тем, что магнитное поле препятствует возникновению больших азимутальных скоростей (V_φ), являющихся основным источником сил Кориолиса. Приблизительно соотношение энергий, приходящихся на компоненты V_r , V_θ и V_φ без магнитного и с магнитным полем равны: 240:220:1440 и 230:250:900. Энергия двух других компонент скорости V_r и V_θ остается практически без изменений.

Случай, соответствующий $\zeta \ll 1$, наиболее интересен для Земли. Рассмотрим подробнее силы, действующие на поверхность твердого ядра. Опускающаяся жидкость, несущая относительно бóльший угловой момент вращения, со-

здает положительный градиент азимутальной скорости вблизи внутреннего ядра, который в свою очередь и является источником вязких напряжений на границе твердого и жидкого ядер. Последнее утверждение можно более наглядно продемонстрировать если записать вязкий член в (4.6) в виде:

$$\frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r} = \frac{\partial}{\partial r} \omega \Big|_{r=r_i} r \sin \theta, \quad (4.40)$$

из чего следует, что наличие дифференциального вращения (т.е. зависимости угловой скорости ω вращения жидкости от радиуса r) приводит к закручиванию твердого ядра.

Принципиальным является то, что жидкость поднимается вблизи оси \mathbf{z} , где находятся области повышенной температуры (см. рис. 4.11), мало изменяя величину мо-

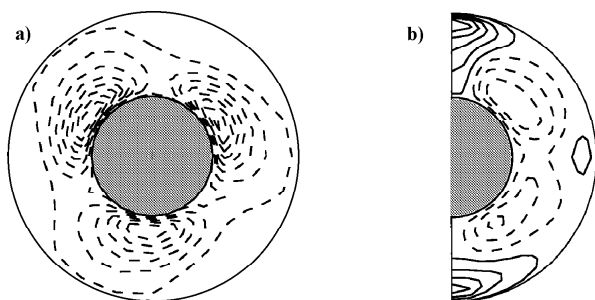


Рис. 4.11: Пространственное распределение компонент поля температуры T для $Ra = 320$ и $R_o = E = 3.2 \times 10^{-3}$. Изолинии представлены с равномерным шагом в диапазоне значений: а) экваториальное сечение: $(-0.9, 0.07)$; б) меридиональное сечение для осесимметричной части решения: $(-0.4, 0.5)$. Сплошная линия соответствует положительным значениям полей, а пунктирная – отрицательным.

мента импульса (см. пространственное распределение по-

ля скорости на рис. 4.12). Опускание же жидкости происходит преимущественно в экваториальных областях, что приводит к появлению дифференциального вращения и сдвиговых напряжений, и как следствию – закручиванию твердого ядра. Другим источником возникновения движений в азимутальном направлении является течение жидкости вдоль поверхности твердого ядра к полюсам. Эти течения также несут бóльший угловой момент и приводят к закручиванию твердого ядра. Последний эффект хорошо наблюдается при малых ζ , когда экмановские слои хорошо развиты.

Остановимся подробнее на магнитных свойствах решения. Во-первых, отметим наличие инверсий магнитного поля. На рис. 4.10d представлена эволюция дипольного коэффициента Гаусса g_0^1 во времени. На протяжении рассмотренного времени наблюдается ряд смен знака этого коэффициента, сопоставляемого нами с инверсиями геомагнитного поля. Дипольность магнитного поля хорошо наблюдается на рисунке с пространственным распределением (рис. 4.13b для компоненты B_r), где мы видим существование областей разного знака в полярных областях. (Рисунок соответствует диполю, направленному вниз.)

Во-вторых, магнитная энергия (см. рис. 4.10a) уже несколько больше кинетической, т.е. другими словами, магнитное поле уже оказывает существенное влияние на гидродинамику системы. Отметим, что появление магнитного поля несколько снизило средний уровень кинетической

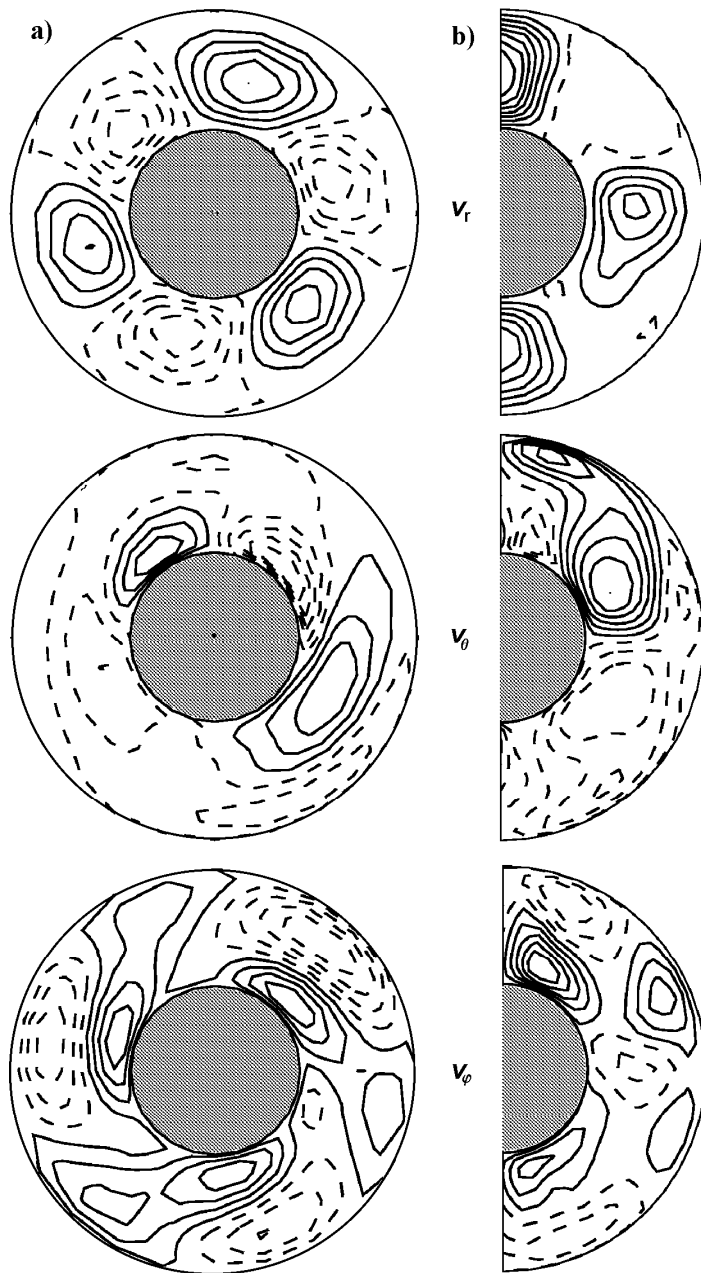


Рис. 4.12: Пространственное распределение компонент поля скорости. Изолинии представлены с равномерным шагом в диапазоне значений: колонка а) – экваториальное сечение: $V_r \in (-40.7, 41.3)$, $V_\theta \in (-11.0, 21.0)$, $V_\varphi \in (-50.4, 52.5)$; колонка б) – меридиональное сечение для осесимметричной части решения: $V_r \in (-8.9, 70.6)$, $V_\theta \in (-25.4, 46.1)$, $V_\varphi \in (-28.0, 54.3)$.

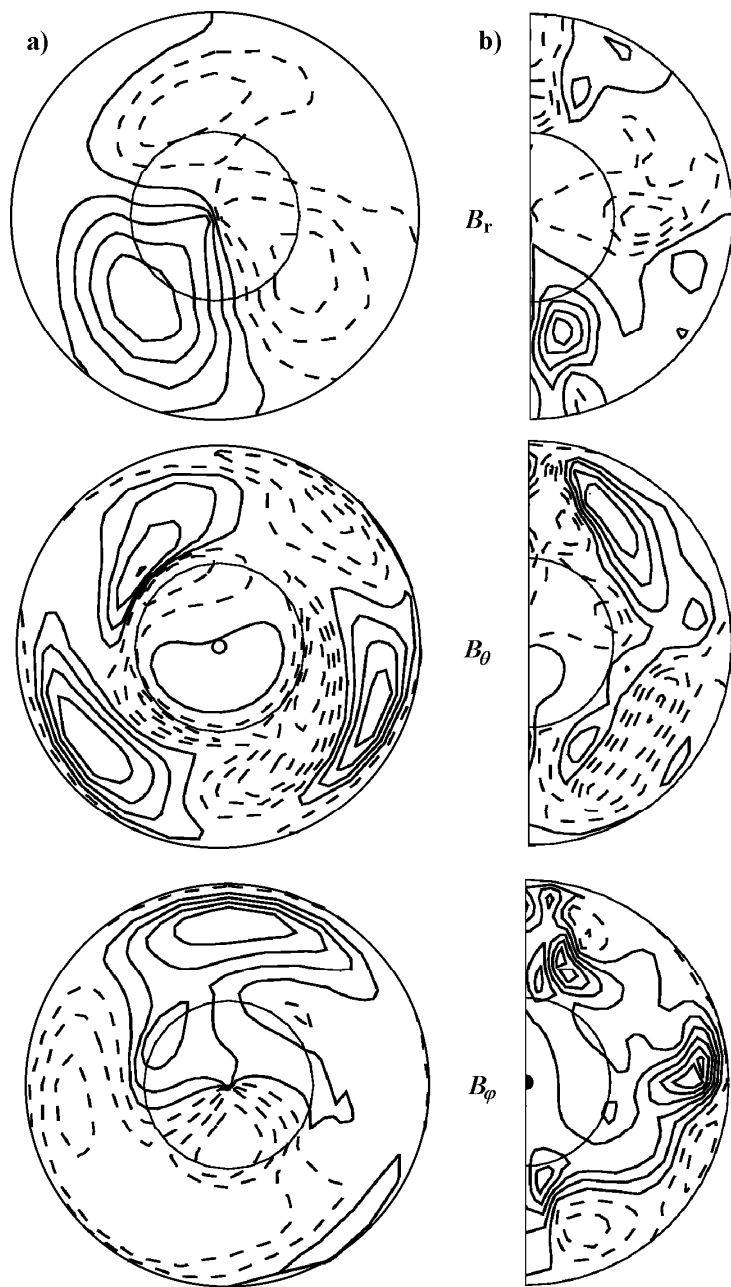


Рис. 4.13: Пространственное распределение компонент магнитного поля. Изолинии представлены с равномерным шагом в диапазоне значений: колонка а) – экваториальное сечение: $B_r \in (-26.8, 52.0)$, $B_\theta \in (-9.5, 16.3)$, $B_\varphi \in (-38.8, 44.1)$; колонка б) – меридиональное сечение для осесимметричной части решения: $B_r \in (-23.5, 33.4)$, $B_\theta \in (-25.2, 25.8)$; $B_\varphi \in (-17.2, 44.1)$.

энергии (см. рис. 4.10b).

Для оценки применимости полученных результатов к реальным планетарным условиям оценим амплитуды характерных величин. Оценка характерного времени для Земли дает $\tau = L^2/k \sim (2 \cdot 10^6)^2/5 \cdot 10^{-6} = 3 \cdot 10^{10}$ лет, что сравнимо с возрастом Вселенной. Однако, поскольку рассмотренная модель позволяет учесть лишь крупномасштабные течения, использование молекулярных значений коэффициентов неоправдано. Для того, чтобы ввести поправку на мелкомасштабные течения (см. подробнее главу 5) необходимо использовать “конвективные” значения для коэффициентов переноса: $k_T \sim lv/3$, где l и v масштаб турбулентности и соответствующая этому масштабу скорость (см., например, [36]). Принимая, что по порядку величины l и v сравнимы с их крупномасштабными значениями (L и V) имеем для $\tau \sim 10^5$ лет, что уже сравнимо с характерным магнитным временем $\tau_M = L^2/\eta$. Отметим, что поскольку для Земли коэффициент молекулярной η и турбулентной η_T магнитной диффузии одного порядка $\sim 2\text{ м}^2/\text{с}$, (глава 3), то магнитное время мало зависит от того какой коэффициент будет использован. В то же время для коэффициента кинематической вязкости ν мы также должны использовать его турбулентное значение: $\nu \sim lv/3$. Суммируя сказанное, мы имеем для единицы времени $\tau \sim 10^5$ лет. Принимая в качестве характерной безразмерной амплитуды скорости $V^* \sim \sqrt{E_K} \approx 35$ (см., рис. 4.10b) имеем, что уже в размерных величинах отно-

шение полученной скорости V^* в единицах k_T/L : $V^* k_T/L$ к скорости западного дрейфа $V_{wd} \sim 0.2^\circ/\text{год}$ составляет порядка 0.1, что является относительно неплохим результатом для столь простой модели. Как уже упоминалось выше, различие в оценках чисел Рэлея и Экмана более существенно. Другим характерным недостатком рассмотренной модели является ее усеченный спектр ($M=3$). Однако, несмотря на все эти недостатки, полученное направление вращения внутреннего ядра совпадает с наблюдаемым. Интересен также тот факт, что это направление в рассмотренном диапазоне параметров не зависит от наличия магнитного поля. Поскольку в реальных объектах энергия магнитного поля существенно больше энергии кинетических движений, а направление вращения по-прежнему восточное (см., [9, 10]), то можно говорить если не о “безсиловом” характере магнитного поля, то во всяком случае о его сравнительно малом “КПД” в гидродинамике ядра.

4.3 Трехмерные модели

Рассмотренные в разделе 4.2 модели-2.5 позволяют улучшить наше понимание о физике процесса и воспроизвести некоторые наблюдаемые геофизические явления. Дальнейшим шагом является создание полностью трехмерных моделей. Первыми, и одними из лучших до последнего времени моделями являются работы Глатцмайера и Ро-

бертса [9, 10], и Блоксхема и Куанга [93]. Отличаясь друг от друга некоторыми деталями, обе модели позволили воспроизвести ряд характерных наблюдаемых черт геомагнитного поля. Однако даже для современных компьютеров детализация, используемая в данных моделях, является очень высокой. Так, в работе [9] расчеты проводились на базе суперкомпьютеров лаборатории в Лос-Аламосе, и последний приведенный в работе расчет занял около 2000 часов компьютерного времени на CRAY-90. В то же время, длительность полученного модельного ряда ($\sim 4 \cdot 10^4$ лет) была лишь порядка одного диффузионного магнитного времени. Поэтому с неизбежностью встал вопрос о создании более простых моделей, позволяющих воспроизвести поведение системы на более продолжительных временах. В тоже время прямое использование моделей-2.5 с большим числом гармоник по φ могло быть не всегда эффективным и требовалось развитие новых подходов к решению задачи.

Необходимость перехода к полностью трехмерным, сеточным моделям диктовалась рядом объективных факторов, имеющих как чисто физическое происхождение, так и связанных с проблемами численной реализации. Назовем лишь некоторые из них. Так, известно, что при быстром вращении сферической оболочки, в которой есть конвекция, возникают цилиндрические колонки ([79, 8]), а их число m зависит от числа Экмана как $\sim E^{-1/3}$ (см., также, [119]). Для Земли $E \approx 10^{-15}$, из чего следует $m \approx 10^5$,

а это требует очень детальной сетки и в третьем, азимутальном (φ) направлении. И хотя есть основания считать, что сильное магнитное поле может подавлять появление структур на малых масштабах, используемый подход должен все же иметь возможность одинаково хорошо описывать поведение во всех направлениях (т.е. быть полностью трехмерным). Представим на мгновение, что произошло локальное в пространстве понижение магнитного поля и турбулентность усилилась. Конечно же, использование большого числа гармоник по φ в моделях-2.5 может решить возникающую проблему, однако, затраты на вычисление нелинейных членов оказываются очень высоки. Проблема затрат на вычисление нелинейных членов выходит за рамки подхода 2.5. Так, на опыте работ Холлербаха известно, что даже при сравнительно небольшом количестве спектральных функций ($32 \times 32 \times 32$) для трехмерных моделей затраты на вычисление нелинейных членов, с учетом экономичных алгоритмов и переходом в физическое пространство, уходит порядка 80% от всего времени. Поэтому с этой точки зрения использование сеточных методов кажется весьма привлекательным.

Другим немаловажным требованием к разрабатываемым численным методам является возможность моделирования процессов переноса, в которых конвективный перенос много больше кондуктивного (молекулярного). Напомним, что в Земле $Re \sim 10^9$, $Rm \sim 10^3$. Как правило, проблема состоит в дискретизации конвективных чле-

нов, содержащих первые производные. Для спектральных методов этой трудности нет, поскольку пространственные производные можно взять аналитически. Для сеточных же методов подобная дискретизация требует специальных приемов, повышающих устойчивость численных схем [120]. В тоже время, сеточные методы в ряде случаев требуют меньших затрат компьютерных ресурсов и являются более привлекательными. Как показали проведенные многочисленные численные эксперименты, прямое использование уже имеющихся подобных приемов, разработанных для полностью сеточных (3-х мерных) методов, для 2.5-мерных моделей не приносит должного эффекта. Поэтому в дальнейшем для описания процессов динамо для режимов, в которых конвекция играет решающую роль, были использованы подходы, использованные в работах по тепловой конвекции [120]. Данные методы продемонстрировали хорошую устойчивость для течений с большими числами Рейнольдса Re . Ниже будет показано, как эти методы, использованные ранее лишь для задач тепловой конвекции, могут быть адаптированы для задач с магнитным полем.

4.3.1 Метод контрольного объема. Схемы Патанкара.

Используемый в работе метод контрольного объема детально описан в [121]. Остановимся лишь на основных моментах. Система уравнений (4.1–4.6) в сферической системе координат (r, θ, φ) рассматривается на смещенной сет-

ке (staggered grid), так что значение вычисляемой переменной для соответствующего дифференциального уравнения определено в центре своего контрольного объема, а значения других величин (в большинстве случаев) на гранях этого объема. Далее уравнение интегрируется по контрольному объему и приводится к выражению для потоков через грани этого объема. Критерием точности является условие консервативности для каждого объема в отдельности. Для решения уравнения Навье-Стокса (4.1) используется так называемый алгоритм SIMPLE [121], позволяющий за счет последовательных коррекций давления и поля скорости получить бездивергентное решение для скорости. Особое внимание уделено аппроксимации конвективных членов для режимов, когда конвективный перенос является доминирующим по сравнению с кондуктивным. В работе рассмотрены различные формы их аппроксимации, но предпочтение отдано схемам против потока (up-wind) [121, 122].

Запись дифференциальных уравнений в виде потоков через грани позволяет обойти еще одну трудность, возникающую в сферической системе координат и описанную в подразделе 4.2.1 – постановку граничных условий в центре и на оси. С подобной проблемой сталкивались еще в работе [123] при моделировании процессов солнечного динамо. Отсутствие правильных граничных условий и не использования методов вида против потока и им подобных привели к тому, что для получения устойчивого решения

в области $\mathcal{V} = (75^\circ < \theta < 90^\circ) \cup (165^\circ < \theta < 180^\circ)$ решение фильтровалось для высоких гармоник, либо расчеты в этой области просто не проводились. Подобная техника использовалась и в работе [124]. Конечно же, данный подход не может считаться удовлетворительным. Применение метода контрольного объема позволило отказаться от фильтрации решения во всей области \mathcal{V} . Для тех случаев, когда требуется знание не только потока некоторого поля на оси и в центре (а он равен нулю), но и самого поля, то искомое значение вычисляется экстраполяцией, так чтобы удовлетворить условиям (4.19). Последнее требует вычисления первых коэффициентов Фурье для двух слоев по координате θ вблизи оси. Отметим также и другой путь решения данной проблемы, сводящийся к решению уравнений на оси в другой, не сингулярной системе координат, например, декартовой. Однако проведенные сравнительные тесты не выявили принципиального преимущества в точности последнего подхода. В то же время устойчивость такого подхода была обычно ниже и требовала уменьшения шага по времени, объем вычислений также увеличивался.

После дискретизации уравнения приводились к системе линейных уравнений. В “r”-направлении для решения использовался метод прогонки, а для двух других направлений – метод Гаусса-Зейделя. Обновленные значения полей использовались в других уравнениях. Уравнения МГД (4.1–4.6) решаются итеративно до тех пор, пока

решение на новом шаге по времени для всех переменных не стабилизируется с точностью до некоторого значения, после этого происходит переход на новый шаг по времени.

Для оценки работоспособности используемых численных методов были использована система тестов, описанная в подразделе 4.2.2. В целом, абсолютные значения ошибок были меньше, чем в модели 2.5. Как и следовало ожидать, расчеты режимов с развитой конвекцией ($Re \gg 1$, $R_m \gg 1$) продемонстрировали большую численную устойчивость используемых алгоритмов, чем в спектрально-разностном подходе (подраздел 4.2.1).

4.3.2 Экмановские слои и вращение твердого ядра.

После проведения тестов, первой задачей, которая была рассмотрена на базе методов контрольного объема, было моделирование экмановских слоев.

Известно, что одной из проблем, встречающихся на пути создания модели конвекции в жидком ядре Земли, является существование тонких экмановских слоев на границе жидкого ядра с твердым ядром и мантией с толщинами порядка $\delta = E^{1/2}$, где $E \sim 10^{-15}$ – число Экмана. Другими словами, для разрешения этих слоев потребовалось бы 10^7 точек сетки хотя бы в одном, радиальном (нормальном к твердой поверхности) направлении. Очевидно, что данная задача выходит за рамки возможностей современных компьютеров, и вряд ли будет решена прямыми методами в ближайшем будущем. Отметим, что

в модели [9], даже при использовании неравномерной сетки, удалось получить лишь режимы с $E = 2 \cdot 10^{-6}$.

Для преодоления этой трудности в [125, 126] авторы, решая двумерную осесимметричную задачу $\alpha\omega$ -динамо, пренебрегли вязкостью жидкости и инерционными членами в основном объеме. Данные упрощения, справедливые в теории динамо, позволили упростить задачу и свести ее к системе алгебраических уравнений. Для того, чтобы поле скорости, получаемое численным интегрированием данной системы, удовлетворяло нулевым граничным условиям, была использована информация об аналитическом решении в экмановском слое, где вязкие силы уже сравнимы с Кориолисовыми и магнитными. Этот подход позволил добиться существенно лучшего описания решения вблизи твердых границ.

Наряду с упомянутым выше достоинством невязкого приближения существуют достаточно жесткие ограничения по его применению. Как уже упоминалось выше, в рамках этого подхода помимо вязких членов отбрасываются еще и инерционные члены. Последнее можно сделать на основе сравнения характерных времен конвекции и изменений магнитного поля (второе на несколько порядков больше первого). Поскольку, согласно прямым и косвенным наблюдениям, энергия магнитного поля между инверсиями превосходит энергию кинетических движений (см., например, [10]) на три порядка и силы Лоренца являются доминирующими в системе, то гидродинами-

ка “мгновенно” подстраивается под магнитное поле. Напомним, что отношение характерного времени конвекции к магнитному времени порядка числа Россби $R_o \sim 4 \cdot 10^{-7}$, стоящего перед инерционным членом в уравнении Навье-Стокса (4.1), и невязкая модель является самосогласованной. Однако при ослаблении магнитного поля, в том числе и локальном, появлении областей, в которых магнитное поле является бессильным, исходные приближения могут быть уже неоправданными. Ситуация усугубляется еще и тем фактом, что согласно моделям [119, 79] при отсутствии магнитного поля в основном объеме предсказывается появление $\sim E^{-1/3}$ вертикальных цилиндрических структур (колонки Бюссе), в которых вязкость и инерционные члены уже могут играть существенную роль. Для их описания вязкость в основном объеме является необходимой.

Далее будет предложен метод, позволяющий рассчитать момент вязких сил, действующий на твердое ядро с учетом слоевых экмановских решений. Данный подход не претендует на решение полной самосогласованной задачи, в которой слоевые решения будут учтены и в уравнении (4.1), а лишь демонстрирует важность учета экмановских слоев при вычислении вязких сил, действующих на твердое ядро. С другой стороны, именно эффект, связанный с вращением твердого ядра, является интегральным и может оказывать существенное влияние на гидродинамику ядра в целом. Подход может быть легко обобщен на слу-

чай сжимаемой жидкости и Экман-Гартмановского слоя при наличии магнитного поля.

Рассмотрим систему уравнений тепловой конвекции (без магнитного поля) в жидком ядре со свободновращающимся твердым ядром (4.1, 4.2, 4.4, 4.5, 4.6).

Как легко видеть из уравнения (4.1), при стремлении E к нулю, решение имеет пограничные (экмановские) слои при $r = r_i, r_0$, и с вычислительной точки зрения задача становится нетривиальной. Несмотря на то, что при заданном на границе с основным объемом полем скорости, решение может быть легко найдено в аналитическом виде, проблема согласования слоевого решения с решением в основном объеме до сих пор открыта и требует совместного решения двух задач.

Идея предлагаемого подхода заключается в том, чтобы при вычислении тензора вязких напряжений на поверхности твердого ядра воспользоваться информацией о поведении поля скорости в экмановском слое.

Представим решение в слое в виде $\mathbf{V} = \mathbf{V}^\circ + \hat{\mathbf{V}}$, где \mathbf{V}° – решение в основном объеме (постоянное в слое) и $\hat{\mathbf{V}}$ – искомое слоевое решение такое, что относительная скорость жидкости на твердой границе обращается в ноль, и $\hat{\mathbf{V}} = 0$ вдали от стенки.

Согласно теории экмановского слоя (см., например, [127, 45, 128]) решение ищется из условия баланса кориолисовых и вязких сил. Пренебрегая тангенциальными производными по сравнению с нормальными, после несложных

преобразований уравнение (4.1) для тангенциальных сло-
евых компонент скорости может быть записано в виде:

$$-\hat{V}_\varphi \cos \theta + E \frac{\partial^2 \hat{V}_\theta}{\partial r^2} = 0, \quad \hat{V}_\theta \cos \theta + E \frac{\partial^2 \hat{V}_\varphi}{\partial r^2} = 0, \quad (4.41)$$

решением которого является

$$\begin{aligned} \hat{V}_\theta &= - \left((V_\theta^\circ - V_\theta^s) \cos(\alpha x) - (V_\varphi^\circ - V_\varphi^s) \sin(\alpha x) \right) e^{-\alpha x}, \\ \hat{V}_\varphi &= - \left((V_\varphi^\circ - V_\varphi^s) \cos(\alpha x) + (V_\theta^\circ - V_\theta^s) \sin(\alpha x) \right) e^{-\alpha x}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

где $\alpha = \sqrt{\frac{|\cos \theta|}{2E}}$ – величина, обратная безразмерной тол-
щине пограничного слоя, x – расстояние от твердой гра-
ницы, а V^s – скорость твердой границы ($V_\theta^s = 0$).

Приведенные зависимости описывают поведение тан-
генциальных компонент скорости в слое и могут быть ис-
пользованы при постановке граничных условий для зада-
чи в основном объеме жидкого ядра, а также для опре-
деления компоненты тензора вязких напряжений $\tau_{r\varphi}$ в
(4.6).

Для решения уравнений (4.1, 4.2, 4.4, 4.5, 4.6) исполь-
зовался описанный выше (см. подраздел 4.3.1) метод кон-
трольного объема [121] на сетке $(15 \times 15 \times 15)$. Для аппрок-
симации нелинейных конвективных членов в уравнениях
использовалась схема против потока (up-wind).

На рис. 4.14, 4.15 представлена эволюция некоторых
интегральных характеристик решения системы уравне-
ний (4.1, 4.2, 4.4, 4.5, 4.6) для различных значений па-
раметров. Для вычисления производных, входящих в $\tau_{r\varphi}$

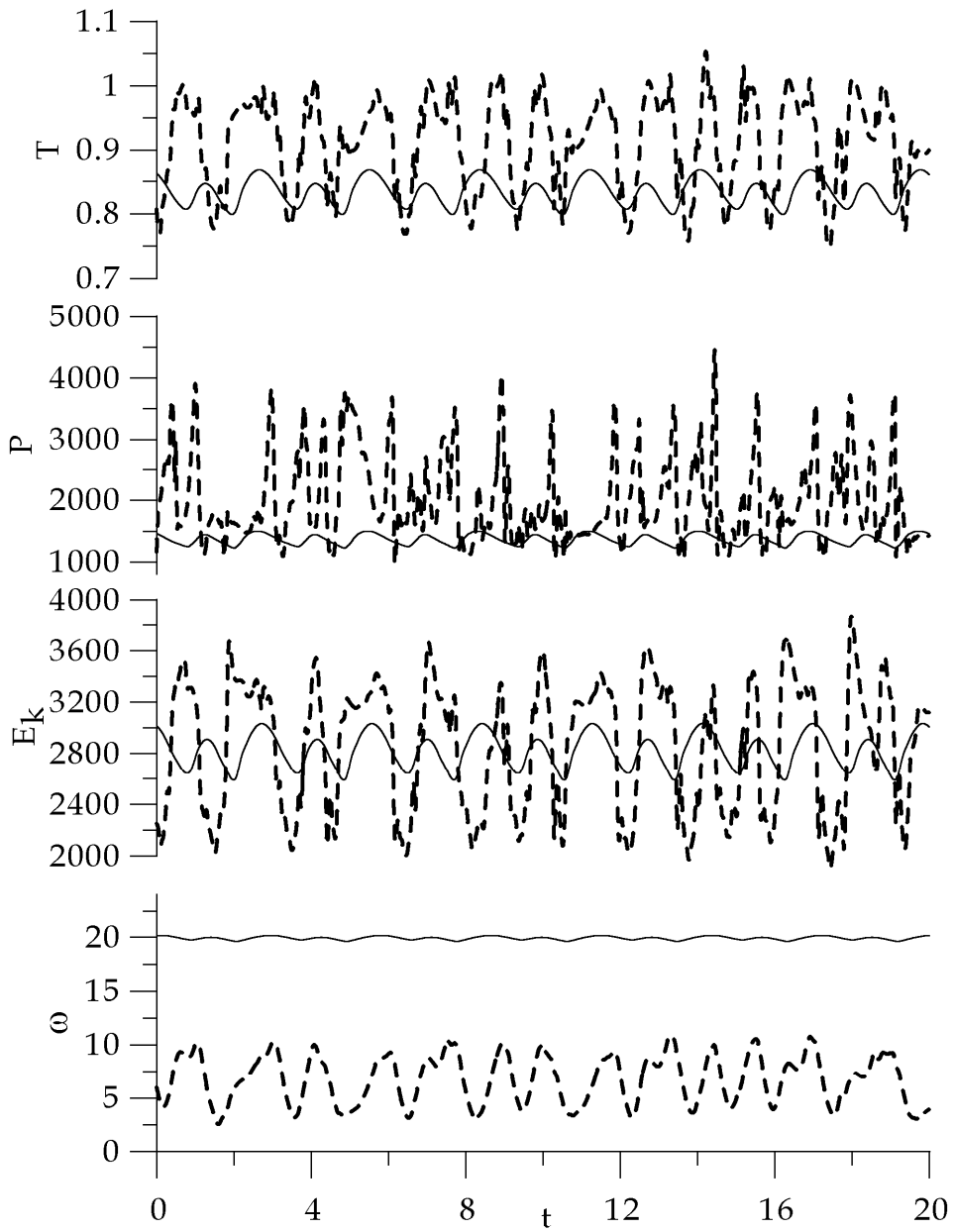


Рис. 4.14: Эволюция средних по объему: температуры, T , давления, P , кинетической энергии, E_k и угловой скорости (ω), все величины, включая время, в безразмерных единицах; $R_o = 1$, $Ra = 10^4$, $E = 10^{-3}$. Без учета экмановского слоя (пунктирная линия) и с учетом экмановского слоя (сплошная линия).

(4.6) использовались традиционные правосторонние трехточечные схемы второго порядка точности. Для сравнения на тех же рисунках представлена эволюция этих же характеристик с использованием слоевых решений. В этом случае для вычисления $\tau_{r\varphi}$ использовались зависимости (4.42). Преимуществом данного метода является то, что для вычисления тензора напряжений на поверхности твердого ядра необходимо значение скорости лишь в одной точке V° по r вне экмановского слоя. Отметим, что в случае же традиционной конечно-разностной аппроксимации слоевого решения необходимо следить за тем, чтобы число точек было достаточно для его описания с требуемой точностью, что при малых E уже затруднительно. В случае равномерной сетки это уже технически невозможно.

Как показывает сравнительный анализ рисунков, учет асимптотик в тонком слое оказывает влияние на гидродинамику задачи в целом, а различие в поведении интегральных характеристик задачи увеличивается при уменьшении величины числа Экмана. Практически во всех случаях дисперсия характеристик уменьшается при использовании экмановских асимптотик, решение становится более гладким и даже постоянным во времени (см. кривую для ω на рис. 4.15). Последнее отражает тот факт, что для аппроксимации вязких сил в слое обычными методами используемой сетки уже недостаточно, и необходимо привлечение более детальной информации о поведении решения в слое. Обратим внимание, что данной трудности

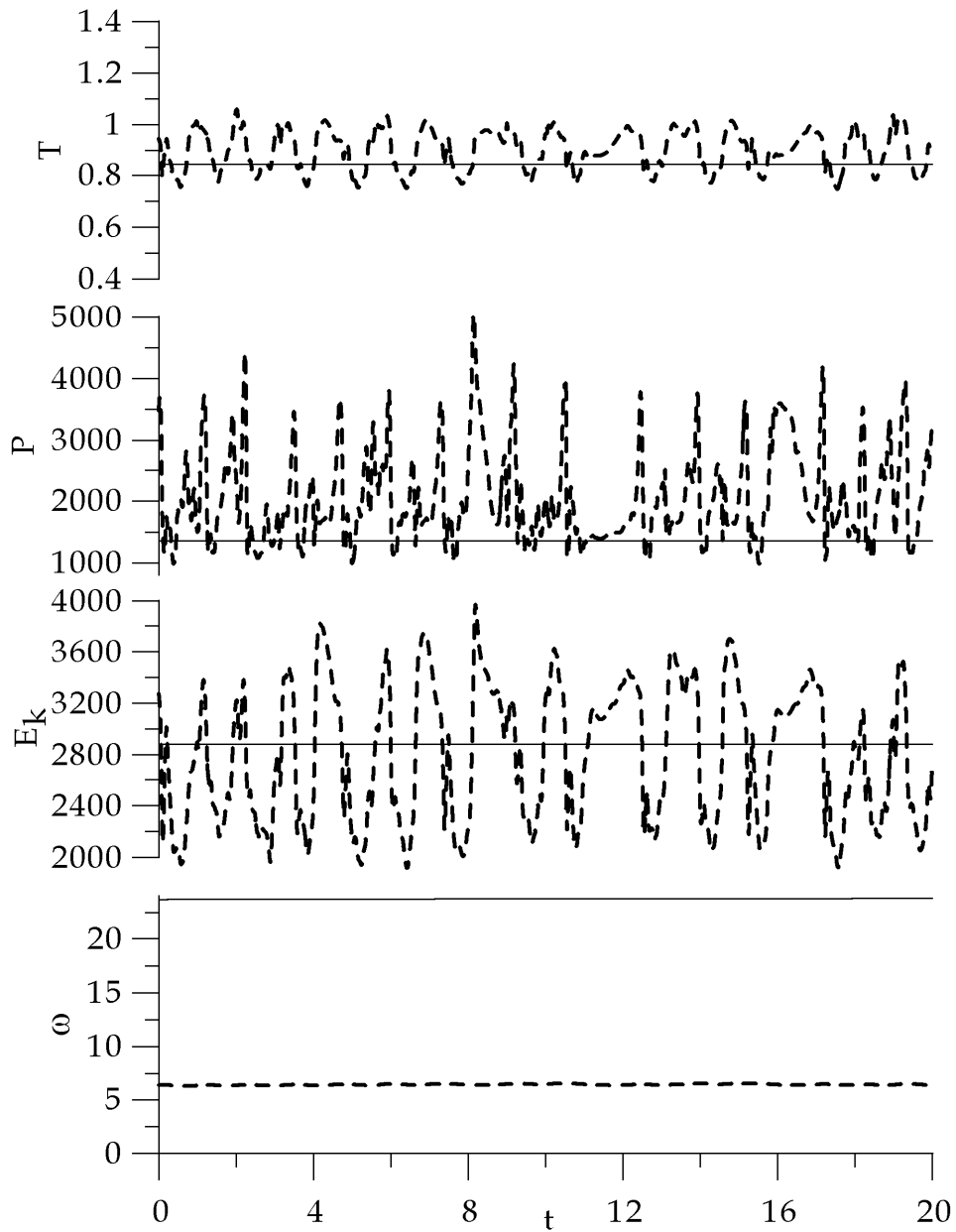


Рис. 4.15: Эволюция средних по объему: температуры, T , давления, P , кинетической энергии, E_k и угловой скорости (ω), все величины, включая время, в безразмерных единицах; $R_o = 1$, $Ra = 10^4$, $E = 10^{-5}$. Без учета экмановского слоя (пунктирная линия) и с учетом экмановского слоя (сплошная линия).

не возникает при вычислении момента магнитной силы, поскольку в выражение для момента входит лишь само поле, а не его пространственные производные (4.6).

В ходе анализа полученных результатов был произведен дополнительный тестовый расчет на устойчивость полученных результатов для стационарного случая ($E = 10^{-5}$) с заданной угловой скоростью вращения твердого ядра ω . В качестве начальных условий для физических полей (и угловой скорости) были взяты значения, соответствующие рис. 4.15. Как и следовало ожидать, решение осталось стационарным.

В заключении отметим, что в дальнейшем необходимо включение экмановского слоя, описываемого (4.42), и в уравнении Навье-Стокса (4.1).

4.3.3 Трехмерная задача динамо.

Рассмотрим решения полной трехмерной задачи (4.1–4.6), включающей магнитное поле. Вычисления проводились на процессоре Pentium-III (1000MHz) на сетке $(r, \theta, \varphi) = (16, 16, 16)$. На первом этапе для заданного режима была рассчитана тепловая конвекция. Далее в систему вносилось затравочное магнитное поле, обычно заданное первыми модами затухания (см. подраздел 4.2.2). Несмотря на то, что на приведенных ниже рисунках приведено поведение системы лишь на нескольких диффузионных временах, в каждом случае предварительные вычисления проводились до стабилизации системы.

Для анализа средних характеристик системы были введены средние по объему энергии, кинетическая и магнитная:

$$E_k = \frac{1}{2} \int \mathbf{V}^2 d\mathbf{r}^3, \quad E_m = \frac{1}{2R_o} \int B^2 d\mathbf{r}^3. \quad (4.43)$$

Отметим, что в выражение для магнитной энергии входит число Россби ($R_o \ll 1$). Мы также ввели нормировку для первого дипольного коэффициента Гаусса g_1^0 : $R_o^{-1/2} g_1^0$.

Рассмотрим поведение кинетической и магнитной энергий, представленных на рис. 4.16 для трех диффузионных времен и двух режимов параметров. Режимы (I и II) между собой отличаются скоростью вращения Земли. Мы видим, что в обоих рассмотренных случаях магнитная энергия больше кинетической (в 3 и 12 раз соответственно), и следовательно, магнитное поле оказывает обратное воздействие на течение. Именно это влияние не позволяет магнитному полю экспоненциально возрасти, как это происходит в случае кинематического динамо, когда обратной связи нет, и $B \sim \exp(\gamma t)$, где γ – константа. Оценить степень обратного влияния магнитного поля на течение можно, также, сравнив значения кинетической энергии систем с одними и теми же параметрами, когда магнитное поле не рассматривается и рассматривается⁴. В обоих режимах (I и II) введение магнитного поля приводило к уменьшению кинетической энергии (в 1.4 и 1.7 раза, соответственно). Прямая оценка сил Лоренца дает:

⁴Все нижеследующие оценки параметров, если это не оговорено дополнительно, соответствуют средним по времени значениям.

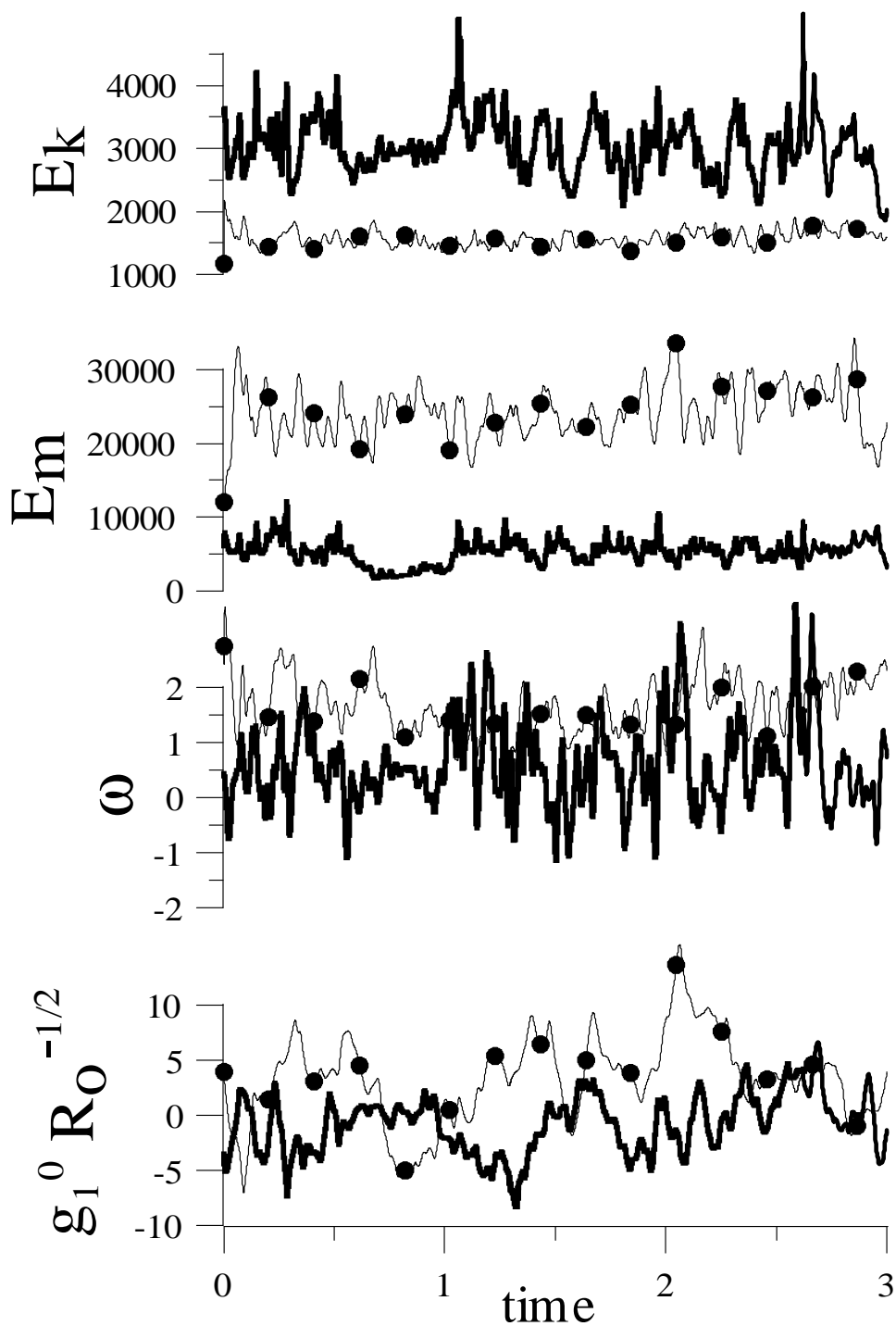


Рис. 4.16: Эволюция кинетической и магнитной энергий, угловой скорости вращения твердого ядра, и магнитного диполя для двух режимов: I (толстая линия) – $E = R_o = 10^{-1}$, $R_a = 3 \cdot 10^3$ и $q = 3$; II (кружки) – $E = 10^{-2}$, $R_o = 10^{-3}$, $R_a = 500$ и $q = 1$.

$W_{A,L} = \int (\mathbf{F}_{A,L} \cdot \mathbf{V}) d\mathbf{r}^3$. В обоих случаях $W_A/W_L \sim 1$. Мы также оценили $\widehat{W}_{A,L} = \int |(\mathbf{F}_{A,L} \cdot \mathbf{V})| d\mathbf{r}^3$ и сравнили их с оценками для W . Анализ показал, что оценки для архимедовского члена остались близкими, в то время как отношение $W_L/\widehat{W}_L \sim 0.3$. Это означает, что архимедовские силы работают на большем масштабе и лучше скоррелированы с полем скорости.

Рассмотрим поведение угловой скорости вращения ω внутреннего ядра. Как и ранее в модели-2.5, мы наблюдаем положительное среднее значение ω , соответствующее восточному направлению вращения твердого ядра. Различие в двух рассмотренных режимах сводится к увеличению отношения среднего уровня к его временным флуктуациям при уменьшении E . Другими словами, чем быстрее вращается объект, тем есть больше оснований считать, что выделенное направление, связанное с вращением, внесет асимметрию в систему. Существование восточного дрейфа вертикальных цилиндрических колонок (колонок Бюссе) наблюдалось в задаче с фиксированным твердым ядром [95].

Возникновение закручивающего момента, действующего на твердое ядро, может быть прослежено при анализе течений в жидком ядре (рис. 4.17-4.18). Рассмотрим эти течения подробнее. Различие этих режимов хорошо видно на распределении поля температуры в меридиональном сечении. Для режима II с более быстрым вращением наблюдаются характерные грибовидные структуры с

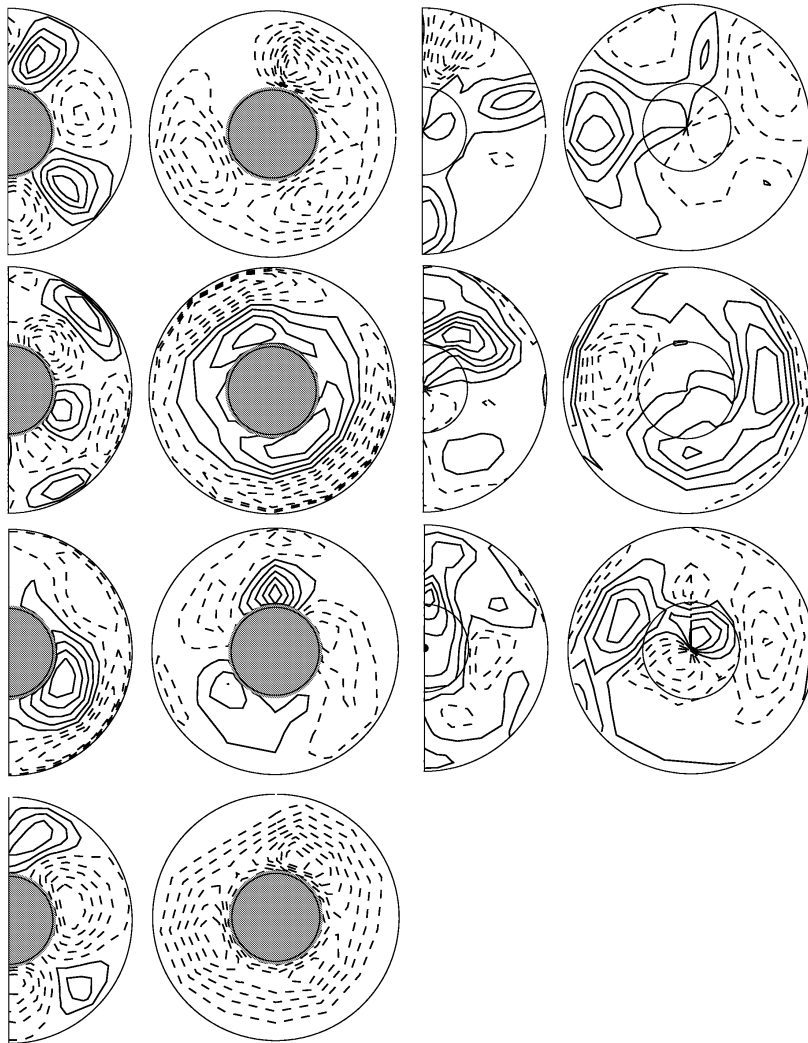


Рис. 4.17: Режим I. Пространственное распределение компонент поля скорости V_r , V_θ , V_ϕ и температуры T в экваториальном и меридиональном сечениях (две левые колонки) и для магнитного поля (две правые колонки). Изолинии представлены с равномерным шагом в интервале значений, указанном с скобках: $(-61,51)$, $(-69,44)$, $(-31,52)$, $(-0.5,0.4)$; $(-55,0.7)$, $(-45,43)$, $(-26,43)$, $(-0.7,0.0)$; $(-18,13)$, $(-7,21)$, $(-6,14)$; $(-17,27)$, $(-16,14)$, $(-11,11)$.

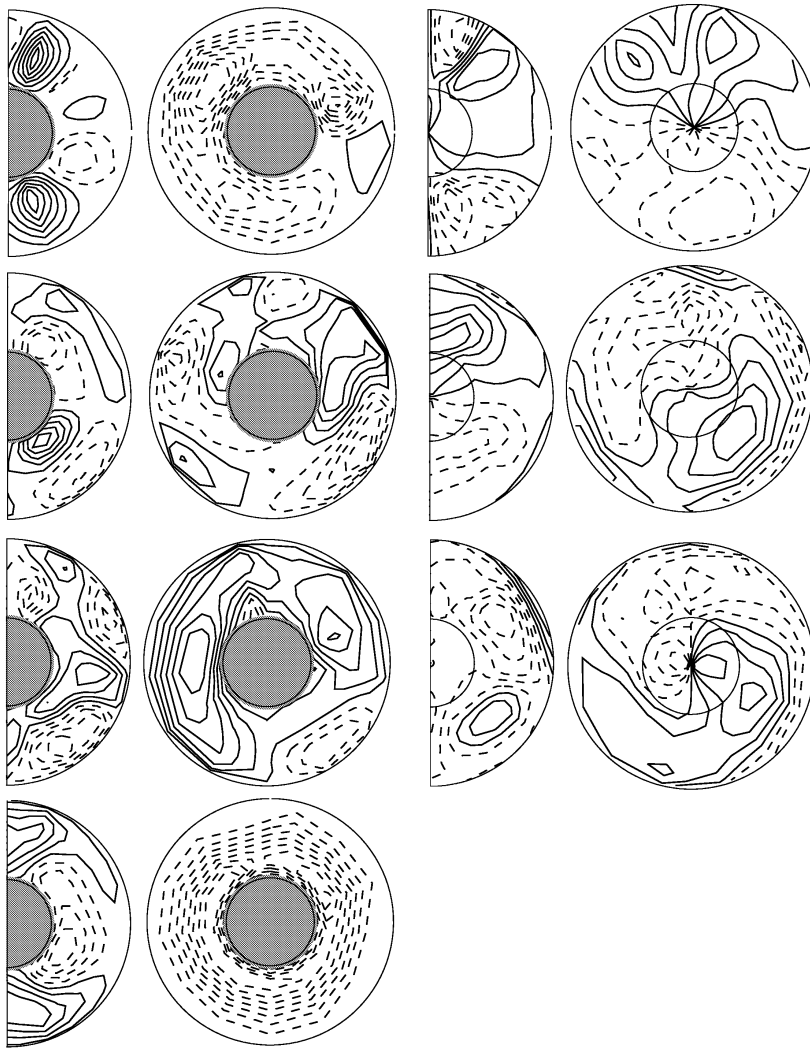


Рис. 4.18: Режим II. Пространственное распределение компонент поля скорости V_r , V_θ , V_ϕ и температуры T в экваториальном и меридиональном сечениях (две левые колонки) и для магнитного поля (две правые колонки). Изолинии представлены с равномерным шагом в интервале значений, указанном с скобках: $(-23,60)$, $(-42,61)$, $(-19,19)$, $(-0.6,0.6)$; $(-27,4)$, $(-18,17)$, $(-11,36)$, $(-0.8,0.0)$; $(-4.4, 4.5)$, $(-5.2,7.3)$, $(-3.5,2.6)$; $(-3.1, 3.6)$, $(-1.8,1.5)$, $(-2.7,2.7)$.

повышенной температурой в области полюсов. Впервые на такие области было указано в [10]. Большой градиент температуры вызывает сильный термический (архимедовский) ветер [129, 94]:

$$\frac{\partial V_\varphi}{\partial z} = \frac{qR_a}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}, \quad (4.44)$$

который, в свою очередь, вызывает закручивание твердого ядра ⁵.

Предложенная модель демонстрирует ряд инверсий геомагнитного поля (см. эволюцию магнитного диполя, представленную первым коэффициентом Гаусса g_1^0 на рис. 4.16). Хорошо видно, что при уменьшении числа Экмана наблюдаются области с предпочтительной полярностью и требуются более длительные вычисления, чтобы не нарушить симметрию магнитного поля. С другой стороны, подобную ситуацию мы уже наблюдали в моделях $\alpha\omega$ -динамо (см. главу 3), в которых при увеличении динамического числа происходила бифуркация новой моды с ненулевым средним по времени.

Следующей рассмотренной характеристикой является спектр Гаусса (см. рис. 4.19). Оба режима соответствуют диполю, наклоненному относительно оси вращения в пределах 10° . Напомним, что современное магнитное поле соответствует углу наклона в 11° . Убывание спектров при увеличении волнового числа n является косвенным подтверждением сходимости численного решения. Наблюда-

⁵Отметим, что возможность восточного направления вращения твердого ядра под действием приливных сил обсуждалась в [67].

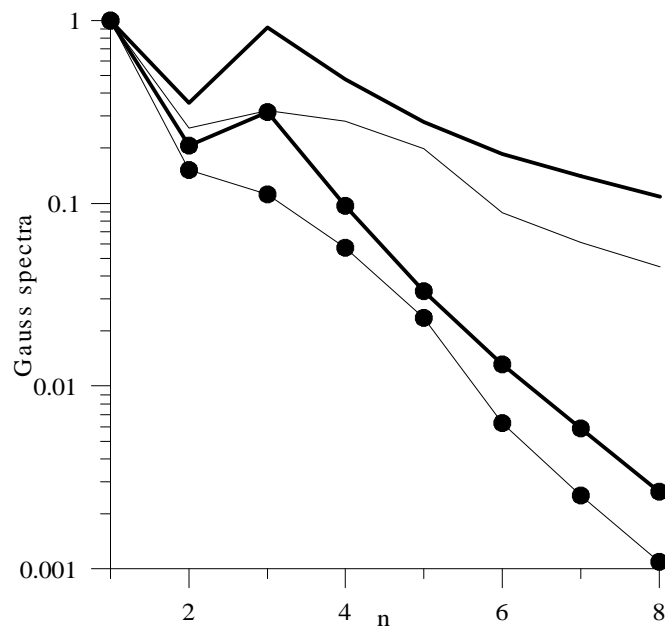


Рис. 4.19: Спектр Гаусса магнитного поля на поверхности жидкого ядра и поверхности Земли (кружки) для двух режима I (тонкая линия) и режима II (толстая линия).

емое преобладание на порядок дипольного коэффициента над остальными на поверхности Земли $r = 1.7$ совпадает с наблюдениями [130].

4.4 Обсуждение

Представленные в этой главе модели геодинamo демонстрируют принципиальную возможность рассмотренной системы уравнений МГД описать генерацию магнитного поля в жидком ядре и получить ряд характеристик, близких к наблюдаемым: дипольное магнитное поле, инверсии, вращение твердого ядра и т.д. Отметим, что после кинематических моделей и моделей типа $\alpha\omega$ -динамо, в

которых влияние магнитного поля на поле скорости отсутствовало, или было неполным, модели, описываемые уравнениями (4.1–4.5) в этом смысле самосогласованны. В них учтены эффекты нагрева жидкости, вращения, подавления магнитным полем конвекции. С физической и математической точки зрения само существование подобных решений уже представляет интерес. Остановимся на самом важном для геофизики вопросе – используемых в модели конкретных параметров и соответствующих требований к вычислительной технике.

Здесь мы немного повторим анализ, проведенный в подразделе 4.2.4 и приведем ряд новых рассуждений. Сначала рассмотрим используемые коэффициенты диффузии для уравнения Навье-Стокса, теплопроводности и индукции. Наиболее хорошо ситуация обстоит с уравнением для магнитного поля. Поскольку есть основания считать, что молекулярная и турбулентная оценки коэффициента магнитной диффузии η близки и порядка $2\text{ м}^2/\text{с}$, то единица времени, определенная в уравнениях как $\tau = L^2/\eta$ равна $1.5 \cdot 10^5$ л. Тогда общее время расчета на рис. 4.16 соответствует $5 \cdot 10^5$ лет, и для режима I средний интервал между инверсиями составит 10^4 л., что, вообще говоря, хоть и является небольшой величиной, но не противоречит наблюдениям и может быть сопоставлено режимам частых инверсий [12]. Для режима II эта оценка уже больше. Немаловажной с точки зрения вычислений является величина магнитного числа Рейнольдса $Re \sim 10^3$. Более подроб-

но вопросы, связанные с разрешением мелкомасштабных полей будут исследованы в главе 5, здесь мы лишь рассмотрим, что можно ожидать от крупномасштабных моделей динамо в чистом виде. Грубая оценка числа точек сетки N в одном направлении дает $N \sim Rm^{-1} = 10^3$, или 10^9 для трехмерной задачи. Несмотря на то, что эта степень дискретизации превосходит все известные и использованные в моделях геодинамо, это уже находится в пределах досягаемости современных компьютеров и может быть реализовано на базе параллельных компьютеров.

Как уже отмечалось выше, хуже дело обстоит с использованием коэффициентов гидродинамической вязкости ν и теплопроводности κ , основанных на их молекулярных значениях. Их использование привело бы к рассмотрению задачи тепловой конвекции в очень широком диапазоне масштабов, что в свою очередь, сделало бы вычисления технически невозможными. Оценки, приведенные в главе 5 показывают, что сетка должна содержать не менее 10^{20} точек. С другой стороны, считая, что диффузия имеет турбулентное происхождение и турбулентные значения числа Прандтля $P^T = \nu^T / \kappa^T$ и числа Робертса $q^T = \kappa^T / \eta^T$ порядка единицы, имеем $\nu^T = \kappa^T = \eta^T = 2 \text{ м}^2 / \text{с}$ и $Re^T = Pe^T = 10^3$. (Строгий анализ дает еще более высокие значения турбулентных коэффициентов диффузии, см. главу 5.) Другими словами, для точного воспроизведения геофизических параметров потребовалось бы не бо-

лее 10^9 точек. Как уже отмечалось выше, это уже близко к современным возможностям суперкомпьютеров.

Перейдем к угловой скорости вращения Земли Ω . Суточное вращение Земли соответствует $\Omega_E = 7 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$. Тогда числа Экмана (Росби) с использованием турбулентных значений коэффициентов диффузии дадут: $E = Ro = \nu^T / 2\Omega L^2 \sim 10^{-7}$. И использованные нами выше оценки $Ro = 10^{-3}$ соответствует существенно более медленному суточному вращению Земли. Отметим, что в работе [10] авторы используют $E = 2 \cdot 10^{-6}$. Однако использование супервязкости⁶ дает близкое к используемому нами значению E . Моделирование при меньших значениях E требует более детальной сетки. По порядку величины минимальный пространственный масштаб, который нужно разрешить, соответствует толщине Экмановского слоя \sqrt{E} . Принимая $E^T = 10^{-7} - 10^{-8}$, имеем $10^9 - 10^{12}$ точек для трехмерной задачи. Данная трудность является одной из основных нерешенных проблем геодинамики. Использование каскадных турбулентных моделей (глава 5) позволяет увеличить значение Ω на два порядка, но в целом не снимает проблему.

Рассмотрим параметризацию теплового режима. Амплитуда тепловых источников определяется величиной числа Рэлея (см. использование различных определений этого числа в задачах геодинамики в [131, 132]). Самая низкая оценка для Земли дает $Ra \sim 10^7$ [94], что совпадает с

⁶В работе использована зависимость вязкости ν от волнового числа l : $\nu(l) = \nu(1 + 0.075l^3)$, где $l = 1 \dots 64$, получившая название супер (или гипер) вязкости.

использованным в [10] значением. Используемые нами значения $Ra \sim 10^3$ в 2.5- и трехмерных моделях (см. подразделы 4.2.4, 4.3.3) существенно уступают этим значениям. Трудность состоит в подавлении численных неустойчивостей на малых масштабах. В работе [10], как уже упоминалось, для этой цели использовалась супервязкость. Поправка на увеличение вязкости на малых масштабах для модели [10] приводит к близким к взятым в нашей модели величинам числа Рэлея. Возможность моделирования конвекции с более высокими числами Рэлея без магнитного поля рассмотрена в главе 5.

Оценка числа Нуссельта, характеризующего отношение полного теплового потока к его кондуктивной части, лежит в пределах 50-80. Напомним, что в модели [10] это значение равно 70, что совпадает с оценкой для Земли, приведенной в [133].

Столь большая разница в числах Рэлея делает пока нецелесообразным рассмотрение более тонких эффектов, например, связанных с точным видом равновесной температуры T_o , определяющей архимедовские источники. В работе использовалось предположение, что конвекция вызвана перепадом температуры между твердым ядром и мантией. Включение в рассмотрение радиоактивных источников в жидком ядре, конечно же, немного изменит результат, но величина числа Рэлея при этом сильно не изменится. Более того, как отмечалось в работе [134], задача динамо, вообще, не очень чувствительна к исполь-

зуемым моделям конвекции. Примером тому служат результаты по наблюдаемому магнитному полю на поверхности планеты в моделях [10, 11, 93]. (В первой модели использовался механизм тепловой конвекции, во второй – концентрационной, а в третьей – вместо условий непроскальзывания на твердых границах для жидкости использовалось условие отсутствия трения.) В этой связи использование механизмов концентрационной конвекции [135, 86] хоть и является интересным и важным самим по себе, но может не привести к большому согласию с наблюдениями.

4.5 Выводы

1. Разработаны 2.5-е и трехмерные модели динамо с тепловыми источниками с учетом свободновращающегося твердого ядра Земли. Получены режимы с большим количеством инверсий магнитного поля. Пространственный спектр магнитного поля близок к наблюдаемому.
2. Показано, что в широком диапазоне параметров твердое ядро Земли вращается в восточном направлении относительно мантии под действием вязких сил. Добавление магнитного поля, в целом, не меняет это поведение.
3. Исследована возможность влияния экмановских сло-

ев на вращение твердого ядра.

4. Рассмотрено влияние архимедовских и магнитных сил на формирование слоев Стюартсона. Исследован эффект “супервращения” в нелинейном приближении.

Глава 5

Турбулентные модели динамо

Моделирование процессов конвекции и динамо в жидком ядре Земли является одним из фундаментальных вопросов геофизики. Одной из трудностей, встречающейся на пути моделирования этих процессов, является турбулентность, требующая рассмотрения процессов в широком диапазоне пространственно-временных масштабов. Для этой цели ниже мы рассмотрим каскадные модели турбулентности, позволяющие упростить исходные уравнения и сделать подобное моделирование технически возможным. Данный подход позволяет оценить величины турбулентных коэффициентов переноса и некоторые спектральные характеристики мелкомасштабных полей [136]. Полученные оценки турбулентных параметров сделаны впервые в теории динамо и могут быть использованы при моделировании крупномасштабных полей с учетом эффектов турбулентности. Далее мы рассмотрим комбинированные модели [137, 138], включающие в себя трехмерные модели (см. главу 4) и каскадные модели.

5.1 Оценки мелкомасштабных полей

В настоящее время жидкое ядро Земли является объектом пристального междисциплинарного исследования. Поскольку именно эта часть Земли ответственна за генерацию планетарного магнитного поля, не удивительно, что за последние годы был предложен целый ряд моделей МГД конвекции в жидком ядре. К настоящему времени трехмерные модели динамо, основанные на механизмах тепловой (концентрационной) конвекции, позволяют воспроизвести ряд наблюдаемых черт геомагнитного поля: пространственный спектр магнитного поля, инверсии геомагнитного поля, преобладание магнитной энергии над кинетической энергией конвективных движений. Модели, включающие в рассмотрение вращение твердого ядра, получают сопоставимые с данными сейсмологии [115] оценки для скорости и направления вращения твердого ядра Земли относительно мантии. Основная проблема моделирования – это достижение наиболее реалистичного диапазона параметров. Ниже мы дадим некоторые оценки параметров турбулентности в жидком ядре Земли и рассмотрим подходы, позволяющие дать статистическое описание МГД процессов в широком диапазоне пространственно-временных масштабов.

Одной из основных трудностей, встречающейся на пути моделирования МГД процессов в жидком ядре Земли, является проблема малых величин диффузионных коэф-

фициентов. Это, в свою очередь, приводит к необходимости описания процессов в жидком ядре Земли в широком диапазоне пространственно-временных масштабов. Наиболее критично ситуация обстоит с гидродинамикой. Для жидкого ядра с радиусом $L = 3500$ км оценка числа Рейнольдса $Re^M = LV_{\text{wd}}/\nu^M$ по скорости западного дрейфа геомагнитного поля $V_{\text{wd}} \approx 0.2$ °/год дает $Re^M \sim 10^9$, где коэффициент кинематической вязкости $\nu^M = 10^{-6}$ м²с⁻¹ [45]. (Здесь и ниже индекс ^M соответствует молекулярным значениям коэффициентов.) Столь большая величина числа Рейнольдса соответствует состоянию развитой турбулентности. Простые оценки числа степеней свободы для Колмогоровской турбулентности [139] для трехмерной задачи дают $N = Re^{9/4} \sim 10^{20}$, т.е. для дискретного описания задачи необходимо 10^{20} сеточных точек. Отметим, что наиболее детальные современные модели геодинамо [9, 93] дают среднее разрешение по пространству порядка $(10^{-2} \div 10^{-3})L$, что еще очень далеко от требуемых $Re^{-3/4}L$. Аналогичная оценка числа Пекле $Pe^M = LV_{\text{wd}}/\kappa^M \sim 10^8$, где молекулярный коэффициент температуропроводности $\kappa^M = 10^{-5}$ м²с⁻¹, также свидетельствует о необходимости разрешения большого числа масштабов. Наконец, оценка магнитного числа Рейнольдса $R_m^M = LV_{\text{wd}}/\eta^M \sim 10^3$, хоть и является самой низкой из всех приведенных выше, но и она требует использования самых современных компьютеров. Приведенные выше оценки безразмерных параметров Re^M , Pe^M , R_m^M под-

тверждают, что конвекция в жидком ядре Земли турбулентна, и ее описание требует специальных подходов.

5.2 Каскадные модели турбулентности

5.2.1 Основные уравнения

Существует достаточно обширный класс полуэмпирических моделей турбулентности (см. обзор в [120]), позволяющих оценить диссипацию энергии на малых масштабах. Использование таких моделей формально сводится к вычислению эффективных коэффициентов вязкости и их использованию в крупномасштабных моделях. Модели этого типа широко используются в технике, но до последнего времени не адаптированы на случай сильных магнитных полей¹. Полуэмпирические модели, опираясь на интегральные характеристики мелкомасштабных полей, не позволяют следить за эволюцией спектральных свойств. В данной работе предлагается восполнить этот недостаток с помощью каскадных моделей турбулентности.

Каскадные модели были предложены в семидесятые годы [140, 140] для имитации поведения уравнения Навье-Стокса с помощью динамических систем с ограниченным числом степеней свобод. Модели сформулированы для переменных, которые соответствуют флуктуациям полей с

¹Напомним, что для Земли магнитная энергия, сосредоточенная в ядре Земли, превосходит кинетическую энергию (в системе отсчета, связанной с мантией) на несколько порядков.

волновым вектором k в диапазоне (оболочке) между $k_n = k_0 \lambda^n$ и $k_{n+1} = k_0 \lambda^{n+1}$. Параметр λ характеризует отношение двух соседних масштабов. Обычно $\lambda = 2$. Несмотря на то, что каскадные модели дают лишь упрощенное описание турбулентности, они адекватно воспроизводят многие ее свойства [141, 142]. Основываясь на отдельных разработках каскадных моделей для тепловой конвекции в приближении Буссинеска [143] и МГД турбулентности [144], мы предлагаем аналог полных уравнений динамо (4.1–4.3) на основе тепловой конвекции в терминах каскадных моделей. Рассмотрим следующую безразмерную систему из n обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую эволюцию скорости U_n , температуры Θ_n и магнитного поля B_n :

$$\begin{aligned}
R_o \frac{dU_n}{dt} &= R_o k_n \left(-\frac{1}{8} U_{n-2} U_{n-1} - \frac{1}{4} U_{n-1} U_{n+1} + U_{n+1} U_{n+2} \right) + \\
&\quad Ra^M \gamma_2 \Theta_n - k_n \left(\frac{1}{8} B_{n-2} B_{n-1} - \frac{1}{4} B_{n-1} B_{n+1} + B_{n+1} B_{n+2} \right) - \\
&\quad E^M k_n^2 U_n, \\
\frac{d\Theta_n}{dt} &= k_n \left(U_{n+1} \Theta_{n+2} + U_{n-1} \Theta_{n+1} - \frac{1}{2} U_{n-2} \Theta_{n-1} + \Theta_{n+1} U_{n+2} - \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2} \Theta_{n-1} U_{n+1} - \frac{1}{4} \Theta_{n-2} U_{n-1} \right) - \gamma_3 k_n^2 \Theta_n, \\
\frac{dB_n}{dt} &= \frac{1}{6} k_n \left(U_{n-2} B_{n-1} - B_{n-2} U_{n-1} + U_{n-1} B_{n+1} - B_{n-1} U_{n+1} + \right. \\
&\quad \left. U_{n+1} B_{n+2} - B_{n+1} U_{n+2} \right) - \gamma_1 k_n^2 B_n.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Здесь время t измеряется в L^2/η , а скорость U в единицах η/L , где $\eta = 1 \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$ – значение коэффициента молекулярной магнитной диффузии. Магнитное поле измеряется в единицах $\sqrt{2\Omega\eta\rho\mu_o}$, где $\Omega = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ рад с}^{-1}$ – угловая скорость суточного вращения Земли, $\rho = 10^4 \text{ кг}$

m^{-3} – плотность жидкого ядра, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн м}^{-1}$ – магнитная постоянная. Отношения молекулярных коэффициентов диффузии к величине η заданы параметрами: $\gamma_1 = \eta^M/\eta$, $\gamma_2 = \nu^M/\eta$, $\gamma_3 = \kappa^M/\eta$. Безразмерные числа заданы соотношениями: Россби $R_o = \frac{\eta}{2\Omega L^2}$, Экмана $E^M = \frac{\nu^M}{2\Omega L^2}$ и Рэлея $Ra = \frac{\alpha g_0 \Delta T L}{2\Omega \kappa^M}$, где α – коэффициент объемного расширения, g_0 – ускорение свободного падения, ΔT – мера флуктуаций температуры. Наш выбор единиц измерений позволяет получить сравнительно небольшие безразмерные значения полей, что удобно для вычислений. Отметим, что несмотря на то, что система уравнений (5.1) является существенным упрощением исходной системы уравнений МГД, она сохранила ряд важных консервативных свойств [143, 144]: при стремлении диффузионных коэффициентов к нулю каждое уравнение консервативно, можно проследить переход кинетической энергии в магнитную и наоборот, а также выполнен закон сохранения для гидродинамической и магнитной спиральностей. Далее, нам потребуется ряд величин, которые могут быть определены в рамках каскадных моделей:

$$\mathcal{E} = \sum_n |u_n|^2, \quad \mathcal{H} = \sum_n (-1)^n k_n |u_n|^2. \quad (5.2)$$

В свою очередь, будучи более простой, система уравнений (5.1) позволяет использовать уже реалистичные значения параметров в частности, значения молекулярной вязкости.

5.2.2 Параллельные вычисления

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (5.1) удобна для использования **параллельных систем исчисления**. Мы использовали кластер из трех персональных компьютеров на базе процессоров Alpha-21264 (каждая физическая переменная, U , Θ , V считалась на отдельном процессоре). Параллелизация обеспечивалась средой MPI 2.0. Удобство и эффективность использования параллельных вычислительных систем определяется отношением времени, затрачиваемого на собственно сам вычислительный процесс на каждом используемом процессоре к временным затратам, связанным с обменом информацией между процессорами. Чем выше это отношение, тем эффективней используемый алгоритм, и тем быстрее можно произвести вычисления. В рассматриваемой задаче эффективность вычислений достигалась варьированием интервалов времени, через которые отдельные процессоры обменивались информацией между собой. Эти интервалы выбирались таким образом, чтобы отношение времени счета на процессорах было в несколько раз (на порядок) больше обменного времени между процессорами.

5.2.3 Результаты моделирования. Турбулентные коэффициенты переноса.

Расчеты выполнялись для следующих значений параметров: $E^M = 10^{-15}$, $R_o = 4 \cdot 10^{-7}$, $Ra^M = 4 \cdot 10^7$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 10^{-6}$, $\gamma_3 = 10^{-5}$. Последние два значения соответствуют $\nu^M = 10^{-6} \text{ м}^2\text{с}^{-1}$, $\kappa^M = 10^{-5} \text{ м}^2\text{с}^{-1}$. В качестве граничных условий мы использовали $U_0 = V_{\text{wd}} = 0.2^\circ/\text{год}$, $B_0 = 10^{-2}\text{Т}$, взятые из наблюдений [6]. При этом единица времени составляет $4 \cdot 10^5$ лет.

Эволюция во времени квадратов полей $(\frac{1}{2} \sum_n U_n^2, \frac{1}{2R_o} \sum_n B_n^2, \frac{1}{2} \sum_n \Theta_n^2)$ представлена на рис. 5.1. Картина соответствует установившемуся квазипериодическому процессу с магнитной энергией на 2 порядка большей, чем кинетическая. На рис. 5.2 изображены пространственные спектры трех полей. Отметим, что наиболее широкий диапазон изменений масштабов, представленный в спектре для скорости, соответствует волновому числу $k_n = 2^{33} \approx 10^{10}$ или разрешению $10^{-10} L \approx 4 \text{ мм}$, в то время как максимальный масштаб в модели соответствует размеру жидкого ядра L . Рассмотренный диапазон масштабов полностью покрывает как инерционную область спектров (соответствующие прямолинейным участкам спектров), так и область диссипации (области резкого спада). Прямые линии на графиках соответствуют Колмогоровскому спектру “-5/3”.

Для оценки турбулентных коэффициентов вязкости вычислим (в размерном виде) скорость диссипации для по-

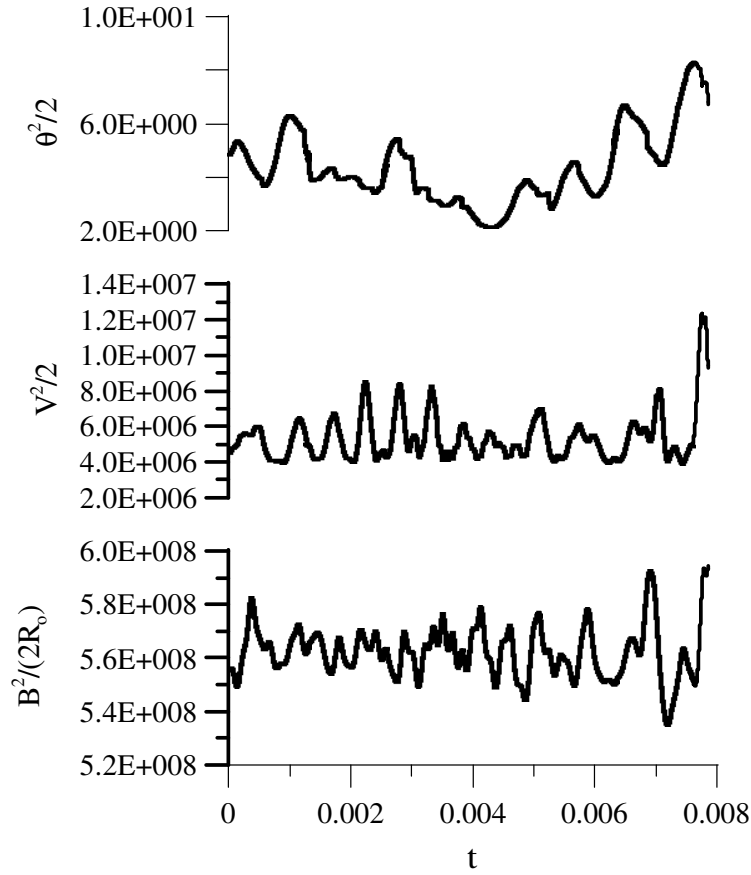


Рис. 5.1: Эволюция квадрата температуры, скорости и магнитного поля в каскадной модели.

лей U , Θ , B :

$$\begin{aligned} \varepsilon_V &= \nu^M \sum_n S(k_n U_n)^2, & \varepsilon_\Theta &= \kappa^M C_p \sum_n S k_n^2 \Theta_n, \\ \varepsilon_B &= \frac{\eta^M}{\rho \mu_o} \sum_n S(k_n B_n)^2 \end{aligned}, \quad (5.3)$$

где $S = 0.1$ – коэффициент Смагоринского [145], а $C_p = 700 \text{ Дж кг}^{-1} \text{ К}^{-1}$ – теплоемкость среды [45]. Тогда турбулентный коэффициент диффузии равен $k_d^T = (\lambda^4 \varepsilon)^{1/3}$, где λ соответствует минимальному использованному n . Другими словами, если мы рассматриваем некоторую круп-

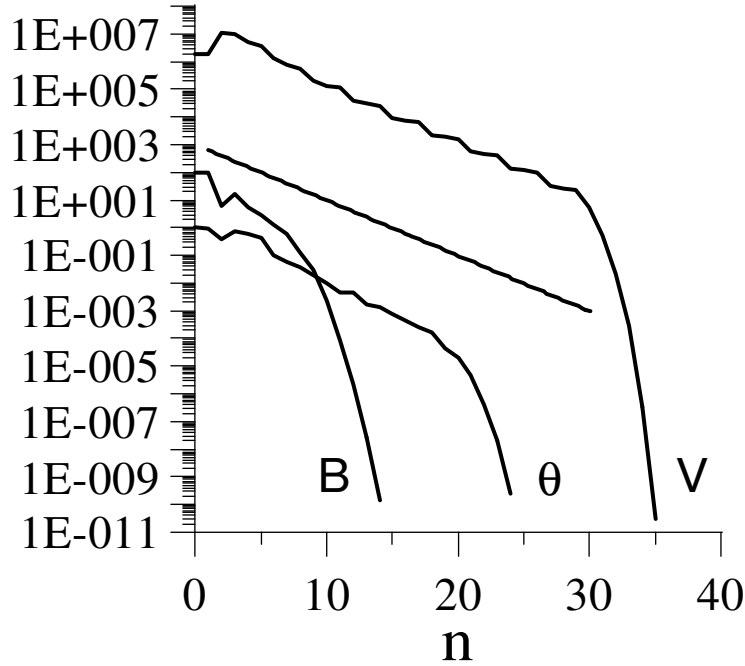


Рис. 5.2: Спектры температуры (θ), скорости (V) и магнитного поля (B). Прямая линия соответствует спектру Колмогорова “-5/3”.

номасштабную модель с ограниченным разрешением $k_n \leq k_{n_{\min}}$ ($\lambda \sim n_{\min}^{-1}$) и интересуемся диссипацией энергии для больших волновых чисел $k_n > k_{n_{\min}}$, то необходимо использовать оценки (5.3). Для крупномасштабной модели, в которой вместо молекулярных коэффициентов диффузии нужно использовать турбулентные значения, коэффициенты перед операторами Лапласа примут вид:

$$\begin{aligned}
 E^M &\rightarrow E^M + E^M \gamma_2^{-2/3} f_V, & \gamma_3 &\rightarrow \gamma_3 + \frac{(L^2 C_p \Delta T \gamma_3)^{1/3}}{\eta^{2/3}} f_T, \\
 & & \gamma_1 &\rightarrow \gamma_1 + R_o^{-1/3} \gamma_1^{1/3} B^2 f_B,
 \end{aligned}
 \tag{5.4}$$

где множители f_V , f_θ , f_B соответствует частям ε_V , ε_θ , ε_B в (5.3) под знаком суммы ($\sum \dots$). (При этом все величины

под знаком суммы уже безразмерны.) Временное поведение E^T , κ^T , η^T изображено на рис. 5.12. Видно, что при-

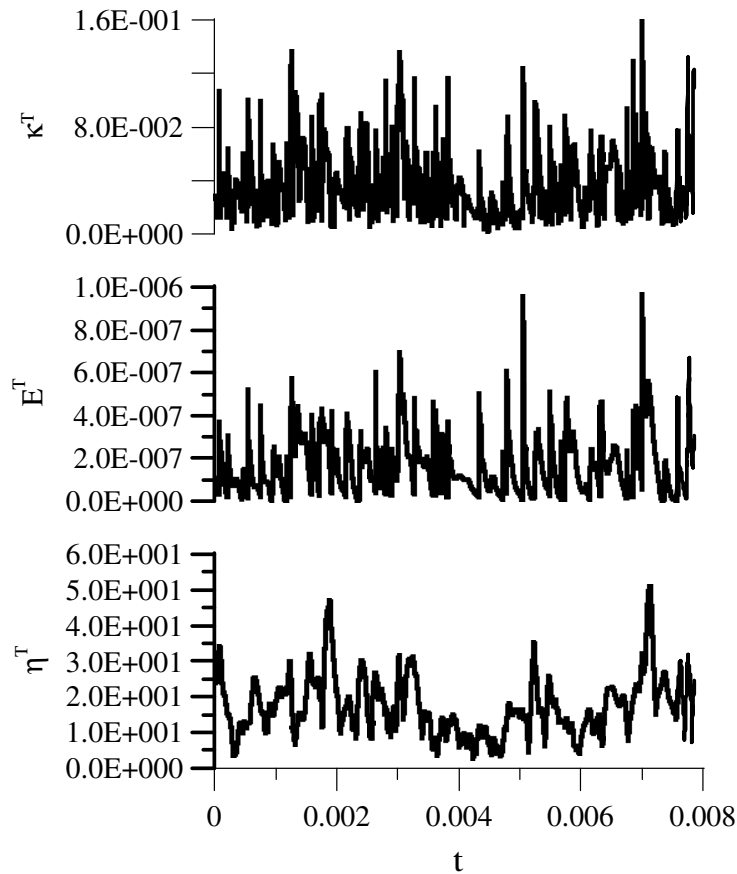


Рис. 5.3: Эволюция турбулентных коэффициента теплопроводности (κ^T), числа Экмана (E^T) и коэффициента турбулентной магнитной диффузии (η^T).

сутствие турбулентности существенно увеличивает значения диффузионных коэффициентов. Оценивая турбулентные коэффициенты переноса как $\nu^T = 10^2$, $\kappa^T = 10^{-2}$ и $\eta^T = 20 \text{ м}^2\text{с}^{-1}$, мы получаем оценки для безразмерных параметров: $Re^T \sim 10$, $Pe^T \sim 10^5$, $R_m^T = 10^2$. Данные значения уже без труда могут быть использованы в чис-

ленном моделировании крупномасштабных процессов динамо. Данный подход также позволяет сопрягать каскадные модели с крупномасштабными моделями, когда обе модели считаются одновременно и обмениваются между собой информацией.

Упомянем некоторые эффекты, не учтенные нашей моделью, но, возможно, способные модифицировать наши результаты. Мы не учитывали роль сил Кориолиса, поскольку они не вносят энергию в МГД-систему. Однако, они, в принципе, могут привести к некоторому подавлению турбулентности вращением и сделать ее анизотропной [146]. Наша модель ограничена также тем, что мы не вычисляем значений скорости и магнитного поля в самом большом масштабе, а берем их из наблюдений, предполагая, что далее спектр является падающим и подбирая согласованное с этим условием значение числа Рэлея. Разумеется, полная последовательная модель геодинамо, содержащая как описание крупномасштабных переменных в рамках сеточной модели, так и описание мелкомасштабных переменных в рамках каскадной модели, должна в будущем отказаться от этих ограничений.

Полученные при решении каскадных моделей значения турбулентных коэффициентов могут быть динамически использованы при решении трехмерных уравнений. В следующем разделе этот подход будет продемонстрирован на примере задачи тепловой конвекции в жидком ядре со свободновращающимся твердым ядром (без магнитного

поля).

5.3 Комбинированные модели

Рассмотрим задачу тепловой конвекции в жидком ядре, описываемую уравнениями (4.1, 4.2, 4.5). Описанные выше подходы решения данных уравнений хорошо работают до тех пор, пока количество сеточных точек (шаг по времени) достаточно для описания наименьших возникающих структур (наименьшего характерного времени процесса). Для более интенсивных режимов конвекции необходимо использование либо большего числа точек, что не всегда технически возможно, либо использование моделей турбулентности, описывающих неразрешенные в крупномасштабных моделях мелкомасштабные поля. Последнее кажется наиболее перспективно и мы рассмотрим именно этот случай. Для этой цели мы предлагаем так называемые *комбинированные* модели. В этих моделях наряду с крупномасштабными моделью, дополнительно моделируется мелкомасштабная часть, описываемая каскадными уравнениями (см. раздел 5.2).

5.3.1 Крупномасштабные уравнения

Далее мы будем считать, что коэффициенты кинематической вязкости и теплопроводности могут быть представлены в виде суммы молекулярных и турбулентных частей: $\nu^M + \nu^T \zeta(r)$, $\kappa^M + \kappa^T \zeta(r)$, где верхний индекс M

и T означают молекулярные и турбулентные составляющие, соответственно. Молекулярные значения не зависят от пространства и времени, в то время как турбулентная составляющая является функцией решения и в нашем случае зависит как от времени, так и от радиальной координаты. В наших расчетах мы также предполагаем, что турбулентное число Прандтля $P^T = \nu^T / \kappa^T = 1$, что не противоречит экспериментальным данным. Введя малый параметр $\beta = \nu^M / \nu^T$, мы получим $\kappa^M / \kappa^T = \beta P^{-1}$, где $P = \nu^M / \kappa^M$ – молекулярное число Прандтля. Выберем в качестве единиц измерения $L = r_0$ – единица длины, скорости \mathbf{V} , времени t и давления $p - \kappa^T / L$, L^2 / κ^T и $2\Omega\rho\kappa^T$, соответственно. Также введем радиальную зависимость турбулентных коэффициентов: $\nu(r) = \beta + \zeta(r)$, $\kappa(r) = P^{-1}\beta + \zeta(r)$. Тогда безразмерные уравнения (4.1, 4.2, 4.5) примут вид:

$$\beta^{-1} P R_o \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] = -\nabla p + \mathbf{F} + \beta^{-1} E \nabla \cdot (\nu \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{e}}) \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla (T + T_o) = \nabla \cdot (\kappa \nabla T), \quad (5.6)$$

где

$$\mathbf{F} = -\mathbf{1}_z \times \mathbf{V} + \beta P^{-1} R_a T r \mathbf{1}_r, \quad (5.7)$$

и $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{e}}$ – тензор напряжения:

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{e}} = e_{ik} = \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \quad \nabla \cdot (\nu \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{e}}) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\nu e_{ik}).$$

Безразмерные числа Россби, Экмана и Рэлея основаны на молекулярных значениях коэффициентов:

$$R_o = \frac{\kappa^M}{2\Omega L^2}, \quad E = \frac{\nu^M}{2\Omega L^2}, \quad R_a = \frac{\alpha g_0 \Delta T L}{2\Omega \kappa^M},$$

см. также раздел 4.1. Для удобства мы также введем и турбулентные аналоги безразмерных чисел: R_o^T , E^T , R_a^T , использующих турбулентные диффузионные коэффициенты. Между молекулярными и турбулентными числами существуют соотношения: $R_o = \beta P^{-1} R_o^T$, $E = \beta E^T$, $R_a = \beta^{-1} P R_a^T$.

Угловая скорость вращения ω внутреннего ядра может быть получена из закона сохранения момента импульса:

$$P^T R_o^T I \frac{\partial \omega}{\partial t} = r_1 E^T \oint_S [\nu(r) e_{\varphi r}]_{r=r_i} \sin \vartheta dS. \quad (5.8)$$

Как мы увидим ниже, идея введенных перенормировок сводится к удобству вычислений. Введение турбулентных величин существенно снижает абсолютные значения полей в крупномасштабной модели. Поскольку именно эта часть накладывает наибольшие требования к устойчивости всей программы, то данный подход позволяет существенно ускорить вычисления.

Как уже упоминалось, уравнения (5.5–5.8) адекватно описывают крупномасштабную конвекцию и процесс теплопереноса до тех пор, пока размер сетки d позволяет разрешить минимальные структуры решения. Следуя идеям Колмогорова, можно ввести следующую оценку для

d : $d_\nu \sim Re^{-3/4}$ (e.g., [139]). Характерная амплитуда скорости V конвекции определяется амплитудой архимедовской силы, поскольку вязкие силы очень малы, а силы Кориолиса скорее приводят к изменению направления движения, чем изменению абсолютного значения скорости. Тогда по порядку величины $\rho V^2 \approx \rho \alpha g_0 \Delta T L$. Следовательно $Re = [Ra/(EP)]^{1/2}$, где $P = \nu^M/\kappa^M$ – молекулярное число Прандтля. Технические проблемы в случае трехмерных вычислений уже возникают, когда $Re > 10^3$. На помощь приходят каскадные модели турбулентности.

5.3.2 Мелкомасштабные уравнения и их связь с крупномасштабными

Описанные в разделе 5.2 система уравнений в принятой нами нормировке имеет вид:

$$\begin{aligned} \beta^{-1} P R_o \frac{du_n}{dt} &= \beta^{-1} P R_o k_n (u_{n+1} u_{n+2} - \frac{1}{4} u_{n-1} u_{n+1} - \frac{1}{8} u_{n-2} u_{n-1}) \\ &\quad + \beta P^{-1} R_a \theta_n - E k_n^2 u_n, \\ \frac{d\theta_n}{dt} &= k_n (u_{n+1} \theta_{n+2} + u_{n-1} \theta_{n+1} - \frac{1}{2} u_{n-2} \theta_{n-1} + \theta_{n+1} u_{n+2} \\ &\quad - \frac{1}{2} \theta_{n-1} u_{n+1} - \frac{1}{4} \theta_{n-2} u_{n-1}) - \beta P^{-1} k_n^2 \theta_n. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Система уравнений (5.9) была решена в диапазоне волновых чисел: $n = n_{min}, \dots, n_{max}$. Нижний предел n_{min} определялся из количества точек в крупномасштабной сетке: $k_{nmin} = 2\pi/d$. Верхний предел n_{max} брался таким, чтобы разрешить Колмогоровский масштаб:

$$k_{nmax} > (R_a/P E)^{3/8}.$$

Наиболее сложным является объединение описанных выше двух моделей. Необходимо вычислить диссипацию энергии на подсеточных масштабах (в каскадной модели), равную соответствующему оттоку энергии в крупномасштабной модели. Для этой цели мы зададим скорость и температуру для двух соседних волновых чисел u_{nmin} , u_{nmin+1} и θ_{nmin} , θ_{nmin+1} в каскадной модели, взяв эти значения из крупномасштабной модели. Эти значения характеризуют осцилляции полей на минимальном масштабе, разрешенном в сеточной (крупномасштабной) модели. Обозначим $\hat{v}(k)$, $\hat{T}(k)$ Фурье-преобразование крупномасштабной скорости и температуры. Тогда выражение

для “эренгии” имеет вид

$$u_n^2 = \int_{k_n}^{k_{n+1}} |\widehat{v}(k)|^2 dk \approx k_n |\Delta v_n|^2, \quad \theta_n^2 = \int_{k_n}^{k_{n+1}} |\widehat{T}(k)|^2 dk \approx k_n |\Delta T_n|^2.$$

Для удобства вычислений u_{nmin} и u_{nmin+1} (также как θ_{nmin} и θ_{nmin+1}) вычисляются через структурные функции второго порядка часто используемых в спектральной теории турбулентности. Для поля скорости это сводится к $S_2(h) = \langle [\mathbf{v}(x+h) - \mathbf{v}(x)]^2 \rangle$ в точке x , где $\langle \dots \rangle$ означает осреднение по пространству. Для температуры выполняется аналогичная операция. В предположении о сферической симметрии далее мы проводим осреднение по сферическим слоям ($r = const$). Вычислив структурные функции, можно оценить u_n : $u_n = \sqrt{S_2}$, и также, соответственно, для температуры. Задав таким образом значения скорости и температуры в каскадной модели на больших масштабах, можно приступить к вычислениям в каскадной модели.

Следующим шагом является учет турбулентных эффектов в крупномасштабной модели. Для этого необходимо вычислить турбулентные коэффициенты переноса. Введем коэффициент турбулентной вязкости и теплопереноса $\kappa^T = \kappa^T(r)$. Предполагая, что при развитой турбулентности $\nu^T \approx \kappa^T$ и, следовательно, $\nu^T(r) = \kappa^T(r)$, $P^T = 1$. Скорость диссипации энергии ϵ равна полной энергии диссипировавшей в каскадной модели за едини-

цу времени:

$$\epsilon = \nu^M \sum_{n=nmin+2}^{nmax} (k_n u_n)^2. \quad (5.10)$$

Согласно гипотезе Колмогорова можно сделать следующую оценку: $d \sim [(\nu^M)^3 \epsilon^{-1}]^{1/4}$. Сравнение с модель Смагоринского [145] оценим эффективную турбулентную вязкость для крупномасштабной модели:

$$\nu^T = 0.1(d^4 \epsilon)^{1/3}, \quad (5.11)$$

где d – характерный шаг сетки в крупномасштабной модели. В безразмерном виде для (5.11) имеем:

$$\zeta = 0.1 \beta^{1/3} d^{4/3} \sum_{n=nmin+2}^{nmax} (k_n u_n)^{2/3}. \quad (5.12)$$

Используя (5.12) мы можем вычислить для каждой сферы радиуса r коэффициенты турбулентного переноса, используемые затем в крупномасштабной модели (5.5), (5.6), (5.8).

5.3.3 Результаты вычислений

Для вычислений крупномасштабной модели была использована сетка $(N \times N \times N, N=16)$ в сферической системе координат (r, ϑ, φ) . Тогда $d = 1/16$ и $nmin = 4$. Отметим, что это лишь средняя оценка минимального разрешенного в сетках масштаба, поскольку, вообще говоря, расстояние между соседними точками в однородной сфе-

рической сетке не сохраняется и в области оси вращения и при приближении к центру происходит сгущение точек. Верхний предел волнового числа взят из расчета $n_{max} = 24$. Поскольку турбулентный масштаб времени $t_d = (R_a/PE)^{-3/4}$ много меньше, чем шаг интегрирования в крупномасштабной модели τ , то при вычислении каскадной модели на времени τ мы использовали большее число шагов.

Задача хорошо поддается распараллеливанию средствами MPI. Каждая модель турбулентности может независимо считаться на отдельном процессоре. Поскольку обмен данными небольшой (для каждого сферического слоя, соответствующего отдельному процессору, необходимо передать и получить не более двух чисел), то эффективность использования **параллельных систем исчисления** может быть очень высока. Оптимизация достигается подбором сетки в крупномасштабной модели и числа процессоров. Для вычислений был использован кластер НИВЦ МГУ, основанный на двухпроцессорных компьютерах класса PENTIUM-III.

Мы провели расчеты для $\beta = 10^{-5}$, $R_o = 10^{-5}$, $E = 10^{-6}$, $R_a = 10^{14}$. Расчеты проведены для интервала времени существенно превышающего турбулентное время процесса, но для удобства представления результатов мы приводим лишь ограниченный интервал времени. На рис. 5.4 представлено поведение крупномасштабных параметров. Верхняя кривая представляет эволюцию крупномасштаб-

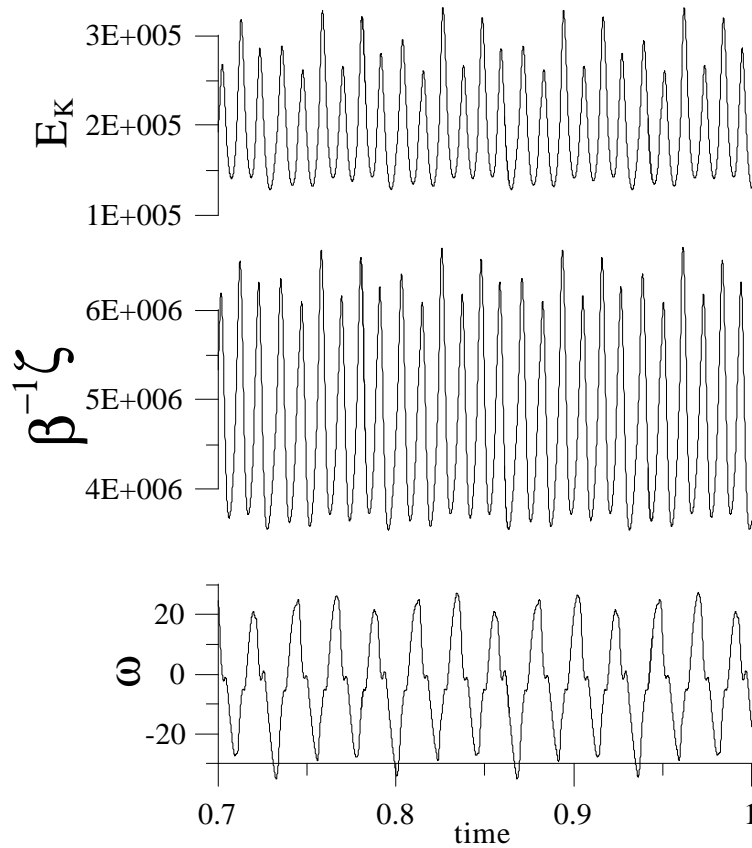


Рис. 5.4: Эволюция кинетической энергии крупномасштабной энергии E_K (верхний рисунок), подсеточной (турбулентной) вязкости $\beta^{-1}\zeta$ (средний) и угловой скорости вращения твердого ядра ω (нижний рисунок) для $Ra = 10^9$, $R_o = 10^{-5}$, $E = 10^{-6}$.

ной кинетической энергии. Отметим, что средний уровень кинетической энергии 2×10^5 соответствует $Re^M \sim 10^9$. Это является режимом развитой турбулентности и для ее прямого вычисления потребовалось бы порядка 10^{20} узлов сетки, в то время как используемая в данных расчетах сетка всего лишь 16^3 узлов в крупномасштабной части и $\sim 20^1$ в каскадной модели, что существенно меньше чем в прямых вычислениях.

Средняя кривая на рис. 5.4 отражает поведение тур-

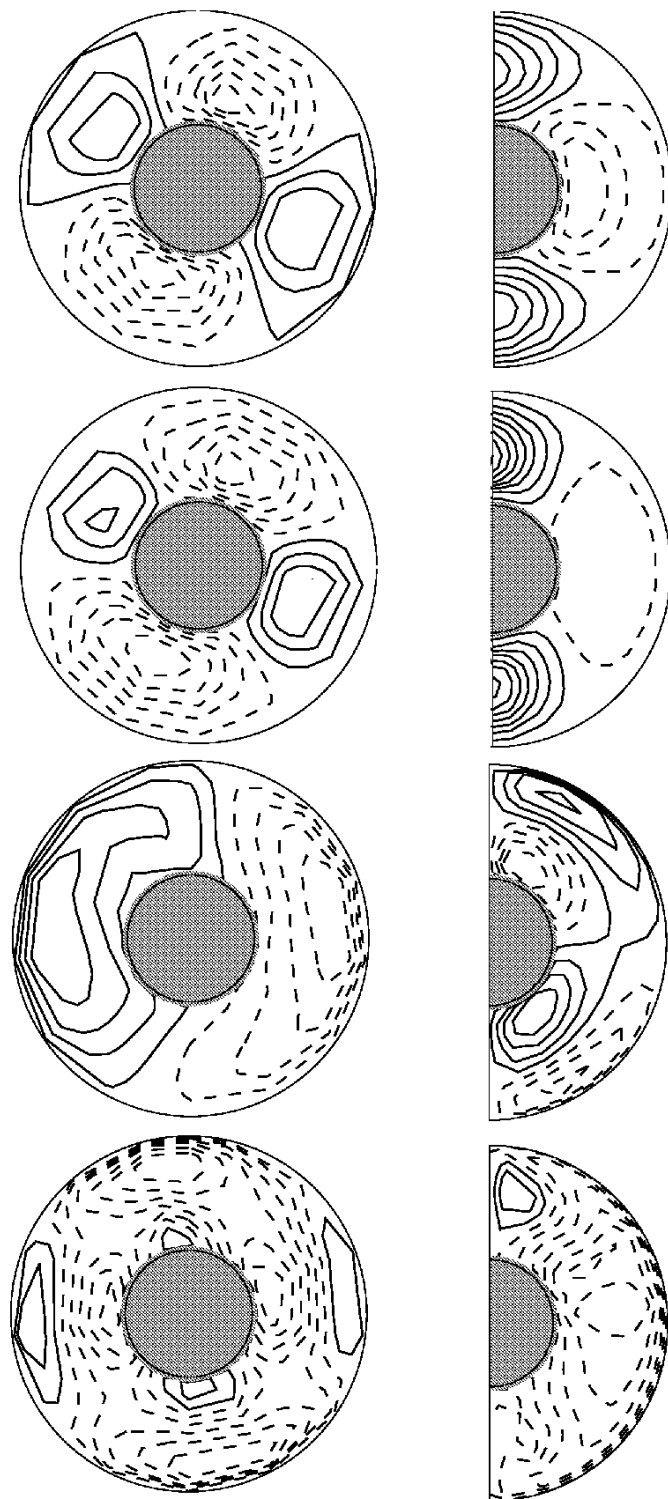


Рис. 5.5: Сверху вниз: мгновенные распределения поля температуры T и компонент поля скорости $(V_r, V_\theta, V_\varphi)$ для экваториального сечения (левая колонка): $(-0.28, 0.14)$, $(-138, 94)$, $(-356, 308)$, $(-203, 87)$, и меридианальное сечение для осесимметричной части (правая колонка): $(-0.1, 0.1)$, $(-35, 228)$, $(-109, 104)$, $(-101, 50)$. Числа соответствуют диапазону изменений полей.

булентной вязкости $\beta^{-1}\zeta$. Средний уровень соответствует значению 5×10^6 . Оценивая турбулентные безразмерные числа из этого значения коэффициента переноса, имеем: $R_a^T \sim 10^{10}$, $E^T = 5$ и $R_o^T = 50$ (изначально мы предположили, что молекулярный Прандтль $P^M = 0.1$).

Нижняя кривая на рис. 5.4 соответствует эволюции угловой скорости вращения внутреннего ядра ω . Поскольку в турбулентной нормировке режим соответствует очень слабому вращению ($E^T = 5$), то мы не наблюдаем выделенного направления, и внутреннее ядро может вращаться как в восточном, так и западном направлении с равной степенью вероятности. Напомним, что для $E \ll 1$ наблюдается дрейф вертикальных цилиндрических структур (“колонок Буссе” [95]), охватывающих твердое ядро в азимутальном направлении, и ω уже имеет ненулевой уровень (см. глава 4). Данные рассуждения находятся в согласии с пространственным распределением течений и поля температуры, представленных на рис. 5.5. Распределения физических полей демонстрируют достаточно гладкое (ламинарное) поведение без мелкомасштабных флуктуаций. Мы также не наблюдаем экмановский пограничный слой на графике для V_φ . Отметим, что если бы мы попытались использовать молекулярные значения коэффициентов в крупномасштабной модели, то даже, если бы численная схема оказалась устойчивой, мы наблюдали бы только численный шум.

Рис. 5.6 демонстрирует спектральные характеристики

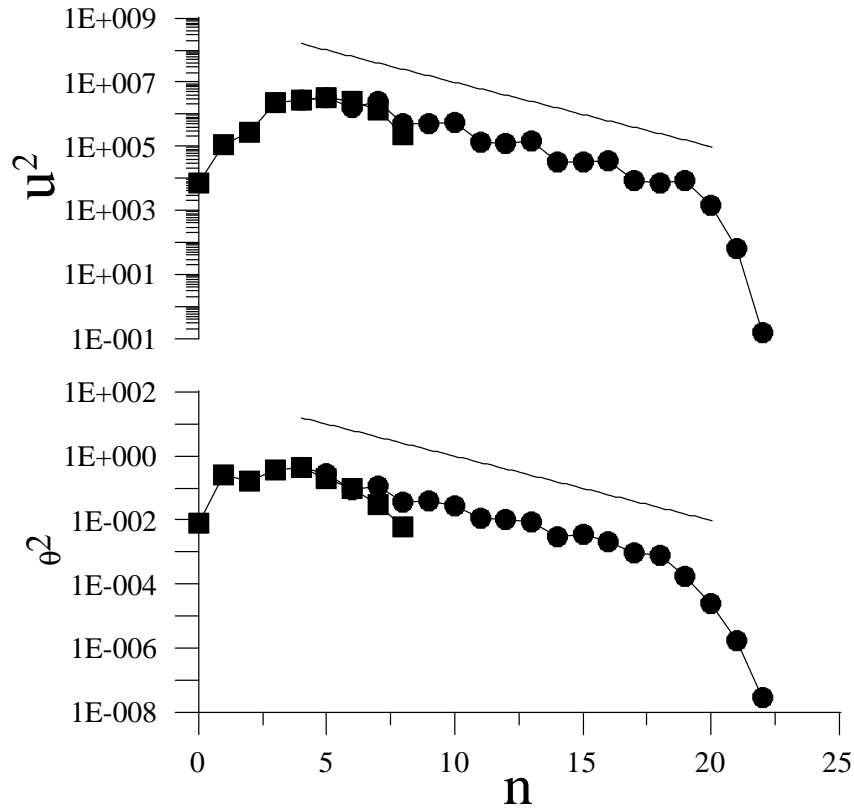


Рис. 5.6: Структурные функции S_2 (квадратики) и спектр в каскадной модели (кружки) для поля скорости и температуры.

как для сеточной, так и каскадной моделей. Крупномасштабная часть спектра представлена структурными функциями S_2 . Спектр каскадной модели вычислен на основе средних квадратов полей: $\sim \langle u_n^2 \rangle$, $\langle \theta_n^2 \rangle$. Сопряжение между моделями происходит при $n_{min} = 4$ и $n_{min} + 1 = 5$. Хвосты структурных функций ($n = 5 \div 8$) соответствуют полярным областям, где происходит сгущение сферической сетки. Несмотря на то, что мы не требовали совпадения значений полей для обеих моделей для $n > 5$,

сходство кривых прослеживается, т.е., другими словами, вычисленные различными методами энергии полей близки, что свидетельствует о самосогласованности используемых моделей и правильности их сопряжения. Конец инерционного интервала приходится на $n = 19$. Наклон спектра совпадает с Колмогоровской оценкой “-5/3” (прямая линия на рисунке).

На рис.5.7 представлена зависимость турбулентной вяз-

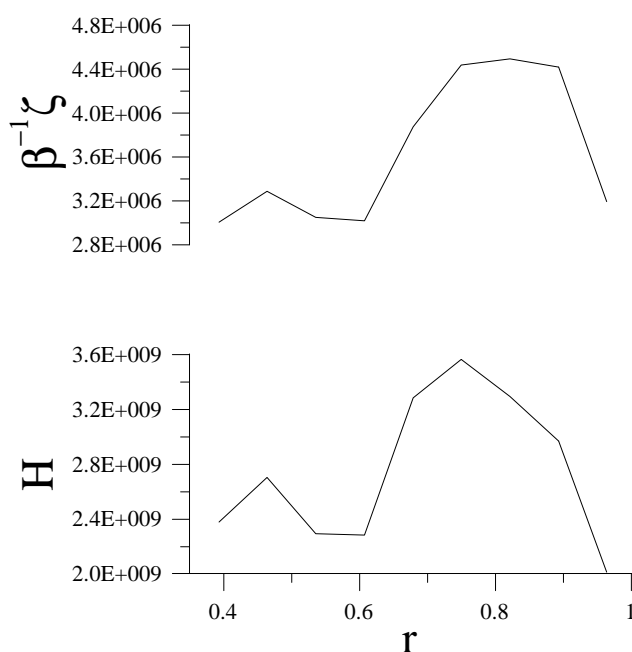


Рис. 5.7: Пространственное распределение турбулентной диффузии и спиральности по радиусу.

кости и гидродинамической спиральности (5.2) по радиусу жидкого ядра. На обоих рисунках максимумы распределений соответствуют областям $r = 0.7 \div 0.8$ с повышенной интенсивностью конвекции (см. рис. 5.5). Дополнительную информацию о процессе можно почерпнуть из рис. 5.8, на котором представлена двумерная спектраль-

ная диаграмма для мелкомасштабных полей u и θ .

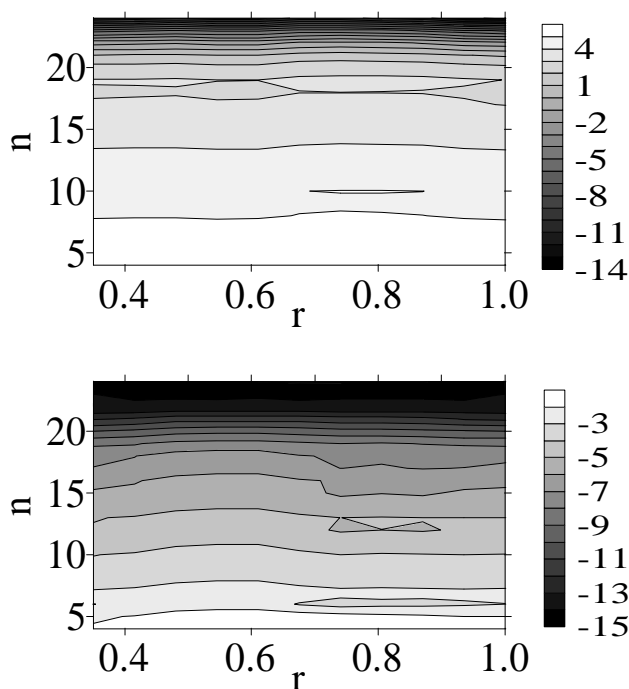


Рис. 5.8: Зависимость спектра ($\log_{10} u_n^2$, $\log_{10} \theta_n^2$) турбулентной скорости (верхний рисунок) и температуры (нижний) от радиуса r для разных волновых чисел n .

5.4 Выводы

1. Рассмотрены каскадные модели МГД турбулентности для жидкого ядра Земли. Данный подход позволяет проследить многие свойства мелкомасштабных физических полей в широком диапазоне пространственно-временных масштабов. Даны оценки турбулентных коэффициентов переноса
2. Предложен подход, позволяющий создать комбиниро-

ванные модели, в которых, наряду с крупномасштабными течениями рассматривается и турбулентность. Данный подход существенно выходит за рамки геофизических приложений и может быть использован во многих физических (астрофизических) и технических приложениях.

Глава 6

Заключение

В работе дан анализ ряда моделей динамо, расположенных по степени усложнения. Поскольку степень детализации модели находится в обратной зависимости от требуемого объема вычислений и необходимых ресурсов вычислительной техники, то модели покрывают большой диапазон пространственно-временных масштабов. (Тем не менее, все использованные модели позволяют воспроизвести инверсии магнитного поля.)

Использование простейших маломодовых моделей (глава 2) и их сравнение с наблюдениями позволило сформулировать ряд критериев и характеристик, которые могут быть использованы в недалеком будущем при анализе более сложных моделей, например, моделей $\alpha\omega$ -динамо и трехмерных моделей динамо (главы 3, 4).

Разработанная модель трехмерного динамо (глава 4) на основе конечно-разностных сеточных методов, уже сейчас позволяет проводить статистический анализ инверсий магнитного поля, что еще несколько лет назад было

нереальным даже на суперкомпьютерах.

Особо хотелось бы отметить значимость и перспективы каскадного подхода и комбинированных моделей, рассмотренных в главе 5. Последние конференции в области динамо, и геодинамо в частности, показали, что проблема турбулентности является одной из самых насущных задач при моделировании процессов динамо в астрофизических объектах в настоящее время. Предложенный подход является на данный момент лучшим кандидатом для решения этой задачи. Возможности каскадных моделей далеко превосходят возможности известных автору полуэмпирических моделей турбулентности. Помимо учета эффектов, связанных с турбулентной диффузией и приводящих к затуханию процессов, например, подавлению генерации магнитного поля за счет интенсивного перемешивания, эти модели способны описывать и генерацию полей мелкомасштабными течениями (α -эффект). Если в известных сегодня моделях средних полей (глава 3), спиральность принималась заданной, то с помощью использования каскадных моделей уже возможен ее динамический расчет. Это позволит применить накопленный обширный аналитический и численный опыт в $\alpha\omega$ -моделировании в крупномасштабных, трехмерных моделях. Работы в этом направлении уже активно ведутся.

6.1 Основные положения, выносимые на защиту

1. Оценки фрактальной размерности и вейвлет-характеристик магнитостратиграфической шкалы и подбор моделей динамо, отвечающих этим оценкам.
2. Определение амплитуд α - и ω -эффектов, величины и знака динамо-числа для жидкого ядра Земли.
3. Предложена модель подавления магнитным полем α -эффекта и механизм установления состояния сверхравнораспределения МГД конвекции с преобладанием магнитной энергии над кинетической.
4. Создание неосесимметричной модели теплового геодинамо со свободно вращающимся твердым ядром.
5. Применение каскадных моделей турбулентности для изучения МГД турбулентности в жидком ядре Земли.
6. Разработка комбинированной модели, включающей в себя модель крупномасштабной конвекции и каскадную модель турбулентности.

Список публикаций автора

- Статьи в реферируемых изданиях

1. Reshetnyak, M.Yu., Sokoloff, D.D., Shukurov, A.M. Evolution of a magnetic blob in a helical flow. *Astron. Nachr.*, 1991, 1, 33–39.
2. Reshetnyak, M.Yu., Sokoloff, D.D., Shukurov, A.M. Stability of non-linear dynamo in the disk. *Magneto-hydrodynamics*, 1992, 3, 10–18.
3. Решетняк М.Ю., Пилипенко О.В., Зинченко Б.Г., Зверева Т.И. Корреляционные функции вековой вариации геомагнитного поля. *Геомагнетизм и Аэрoномия*. 1994, 34, 145–157.
4. Решетняк М.Ю. Корреляционные характеристики поля вековой вариации. *Геомагнетизм и Аэрoномия*. 1995, 35, N₅, 97–105.
5. Зинченко Б.Г., Решетняк М.Ю. Автокорреляционный анализ поля вековой вариации. *Геомагнетизм и Аэрoномия*. 1996, 36, N₄, 164–172.
6. Reshetnyak, M.Yu., Sokoloff, D.D. Correlation approach to the secular variation field. *Magneto-hydrodynamics*. 1996, 4, 479–482.
7. Решетняк М.Ю. О миграции фокусов вековой вариации. *Геомагнетизм и Аэрoномия*. 1996 Т.36, N₁, С.143–149.

8. Печерский Д.М., Решетняк М.Ю., Соколов Д.Д. Фрактальный анализ временной шкалы геомагнитной полярности. Геомагнетизм и Аэронаука. 1997, Т.37, №4, Р.132–142.
9. Ануфриев А.П., Решетняк М.Ю., Хейда П. Влияние внутреннего ядра на генерацию магнитного поля в модели $\alpha\omega$ -динамо. Геомагнетизм и Аэронаука. 1997, 37, №1, С.161–166.
10. Ануфриев А.П., Решетняк М.Ю., Соколов Д.Д., Хейда П. Эволюция геомагнитного поля в модели $\alpha\omega$ -динамо. Геомагнетизм и Аэронаука. 1997, Т.37, №2, С.91–95.
11. Ануфриев А.П., Решетняк М.Ю., Соколов Д.Д. Оценка динамо-числа в модели турбулентного α -эффекта для жидкого ядра Земли. Геомагнетизм и Аэронаука. 1997, Т.37, №5, С.141–146.
12. Печерский Д.М., Решетняк М.Ю., Соколов Д.Д., Хейда П. Модели $\alpha\omega$ -динамо в свете палеомагнитных наблюдений. Геомагнетизм и Аэронаука. 1998, 38, 4, 108-117.
13. Бураков К.С., Галягин Д.К., Начасова И.Е., Решетняк М.Ю., Соколов Д.Д., Фрик П.Г. Вейвлет анализ напряженности геомагнитного поля за последние 4000 лет. Физика Земли. 1998, Т.9. С.773-778.
14. Галягин Д.К., Решетняк М.Ю., Соколов Д.Д., Фрик

- П.Г. Скейлинг геомагнитного поля и шкалы геомагнитной полярности. ДАН (Геофизика). 1998, Т.360, №4, С.541–544.
15. Hejda, P., Reshetnyak, M. A grid-spectral method of the solution of the 3D kinematic geodynamo with the inner core. *Studia geoph. et geod.* 1999, 43, 319–325
 16. Петрова Г.Н., Решетняк М.Ю. О временном спектре поля вековой геомагнитной вариации и его источников. *Физика Земли*, 1999, №6, С.53–60.
 17. Hejda, P., Reshetnyak, M. The grid-spectral approach to 3-D geodynamo modeling. *Computers & Geosciences*. 2000, V.26, P.167–175.
 18. Галягин Д.К., Печерский Д.М., Решетняк М.Ю., Соколов Д.Д., Фрик П.Г. Вейвлет анализ геомагнитного поля в неогее. *Физика Земли*. 2000, №4, С.82–89.
 19. Решетняк М.Ю., Павлов В.Э. О различных режимах генерации геомагнитного поля за последние 165 млн. лет. ДАН (Геофизика), 2000, Т.372, С.683–686.
 20. Гурарий Г.З., Багин В.И., Гарбузенко А.В., Решетняк М.Ю., Трубихин В.М., Назаров Х. Стационарное геомагнитное поле хрона Матуяма и субхрона Харамильо (Западная Туркмения). *Физика Земли*, 2000, №7, С.31–42.
 21. Hejda, P., Cupal, I., Reshetnyak, M. On the application

- of grid-spectral method to the solution of geodynamo equation. In *Dynamo and Dynamics, a Mathematical Challenge*, Nato Sci. Ser. (ed. P.Chossat, D.Armbruster, I.Oprea), 2001, V. II/26, P.181–187.
22. Решетняк М.Ю. Вращение внутреннего ядра Земли в модели геодинамо. *ДАН (Геофизика)*, 2001, Т.380, №5, С.15–19.
 23. Cupal, I., Hejda, P., Reshetnyak, M. Dynamo model with thermal convection and with the free-rotating inner core. *Planetary Physics Sciences*. 2002, Accepted.
 24. Решетняк М.Ю. Вращение твердого ядра с учетом экмановского слоя. *ДАН (Геофизика)*, 2002, Т.384, С.103–107.
 25. Решетняк М.Ю., Соколов Д.Д., Фрик П.Г. Каскадные модели турбулентности для жидкого ядра земли. *ДАН (Геофизика)*, 2002, Принято в печать.
 26. Frick, P., Reshetnyak, M., Sokoloff, D. Combined grid-shell approach for convection in a rotating spherical layer. *Europhys. Lett.*, 2002, V. 59, №2, P.212–217.
 27. Reshetnyak, M., Frick, P., Sokoloff, D. Combined grid-shell approach for convection problem in a spherical layer. in *Advances in Turbulence IX, Proceedings of the Ninth European Turbulence Conference*, ed. I. P. Castro, P. E. Hancock & T. G. Thomas, Barcelona, 2002, P.283-286.
 28. Hejda, P. & Reshetnyak, M. Control volume method

for the dynamo problem in the sphere with the free rotating inner core. *Studia geoph. et geod.* January 2003.

• Некоторые тезисы конференций

1. Luryan, E.A., Reshetnyak, M.Yu., Ruzmaikin, A.A., Sokoloff, D.D., Shukurov, A.M. Evolution of a magnetic packet in a helical flow. 13th MHD conference in Riga, Salaspils. 1990, 145-146.
2. Zinchenko, B.G., Reshetnyak, M.Yu. Stochastic model of the geomagnetic secular variation. *Annales Geophysicae*. Supplement 1 to V.12, 1994, 12, 172.
3. Петрова Г.Н., Решетняк М.Ю. Модели вековых вариаций и их временные спектры. Тезисы семинара "Палеомагнетизм и магнетизм горных пород". Борок. 1997, 71.
4. Anufriev, A., Reshetnyak, M., Sokoloff, D. The model of α -quenching. Thesis of IUGG 99, 1999, Birmingham, Book of Abstracts, week A, A294.
5. Гурарий Г.З., Багин В.И., Гарбузенко А.В., Решетняк М.Ю., Трубихин В.М., Назаров Х. Вариации геомагнитного поля до и после инверсии Матуяма-Харамильо (Западная Туркмения). Тезисы конференции "Палеомагнетизм и госк-магнетизм". Борок. 1999, 71.
6. Kuzanyan, K., Reshetnyak, M., Sokoloff, D. Asymptotic bifurcation analysis for a nonlinear alpha-omega dynamo.

- Thesis of IUGG-99, 1999, Birmingham, Book of Abstracts, week A, A291.
7. Hejda, P., Reshetnyak, M. Spectral-grid method in geodynamo. *Annales Geophysicae*, Part I, 1999, 204.
 8. Решетняк М.Ю. Модель вращения внутреннего ядра. Тезисы конференции: “Внутреннее ядро Земли. Геофизическая информация о процессах в ядре”. 2000.
 9. Решетняк М.Ю. Трехмерная модель динамо в сферической оболочке. Тезисы VIII Всероссийского съезда по теоретической и прикладной механике. 2001, С.505.
 10. Cupal, I. Hejda, P. Reshetnyak, M. Inner core rotation in the weak dynamo model. Abstract in IAGA-IASPEI. 2001. P.62.
 11. Hejda, P. Reshetnyak, M. A control volume method for the 3D-geodynamo model. Abstract in IAGA-IASPEI. 2001. P.59.

Приложение А

Вейвлет-анализ археомагнитных данных за последние 4 000 тысячи лет

Введение

Одним из проявлений процессов, происходящих в жидком ядре Земли, являются вековые вариации геомагнитного поля (SV). Согласно имеющимся представлениям (см., например, [24, 31]) временной спектр SV является дискретным, а наблюдаемая картина вариаций напряженности геомагнитного поля может быть представлена суперпозицией ряда колебаний с периодами от нескольких десятков до нескольких тысяч лет: 60, 100, 360, 500, 700, 1 200, 1 800, 2 400, 3 500, 5 000 лет. Основными методами в определении спектральных характеристик поля вариаций является фурье-анализ и метод максимальной энтропии (МЭМ) (см., например, [147]). Необходимо отметить, что в обоих из указанных методов изначально закладывается существование строго периодического процесса. Однако,

нет прямых оснований полагать, что сложная нелинейная система, каковой является жидкое ядро Земли, демонстрирует строго периодическое поведение. Известно, что использование фурье-анализа для не строго периодических сигналов может приводить к появлению большого числа ложных пиков в спектре. Более того, анализируемые ряды зачастую содержат пропуски, что тоже осложняет их фурье-анализ.

Ниже мы воспользуемся сравнительно новым методом спектрального анализа – вейвлет-анализом (см., например, [148]). Вейвлеты представляют собой семейство осциллирующих самоподобных функций различных масштабов, которые локализованы как в физическом, так и в фурье-пространствах. Вейвлет-анализ позволяет изучать нестационарные в спектральном отношении процессы, следить за поведением фазы того или иного квазипериодического колебания, оценивать его энергетические характеристики. Получаемые при этом спектры являются более гладкими, в них подавлены кратные и комбинационные частоты (примеры вейвлет-анализа гео- и астрофизических данных можно найти, например, в [149]). Вейвлет-анализ допускает обобщение на случай временных рядов с пропусками в наблюдениях (адаптивный вейвлет-анализ) [149, 150].

В данной статье проведены оценки спектральных характеристик поля SV для трех временных рядов изменения напряженности геомагнитного поля в Болгарии, Гру-

зии и Средней Азии по археомангнитным данным за последние 4 тыс.лет. [151].

Археомангнитные данные

На рис. А.1 представлены евро-азиатские данные изме-

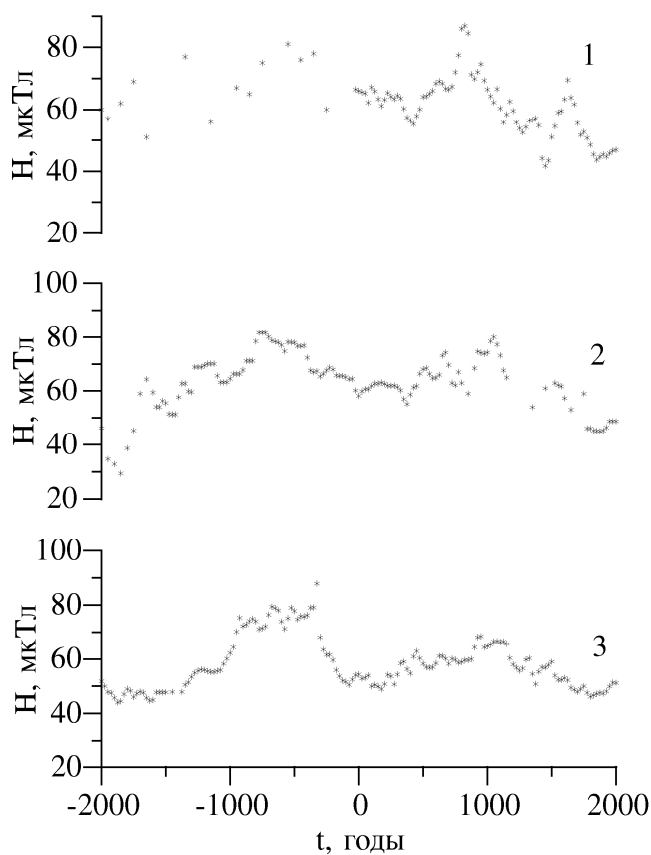


Рис. А.1: Вариации напряженности геомагнитного поля во времени 1) Болгария; 2) Грузия; 3) Средняя Азия.

нения напряженности геомагнитного поля [151]. Временные зависимости напряженности геомагнитного поля отнесены к координатам, представляющим из себя средние значения для каждого района отбора материала: Болга-

рия – 27° в.д., 42° с., Грузия – 44° в.д., 42° с.ш., – Средняя Азия – 65° в.д., 40° с.ш. Распределены данные по шкале времени неравномерно. Наибольшее количество определений для Грузии приходится на I тыс. до н.э., а для Болгарии – на I тыс. н.э. Данные для Средней Азии распределены более равномерно во времени, чем данные для двух других территорий. Отметим, что за два тысячелетия до нашей эры для Болгарии известно лишь несколько десятков определений, в то время как для Средней Азии и Грузии их в несколько раз больше. Однако количество определений для Болгарии, приходящееся на нашу эру, больше в два и в три раза, чем для Средней Азии и Грузии, соответственно.

Исследование спектра вариаций напряженности геомагнитного поля, проведенное с использованием методов, основанных на преобразовании Фурье [151, 152, 153] дало следующие наборы периодов: для Болгарии – 1 560, 1 135, 735, 585, 450, 340 лет, для Грузии – 3 570, 1 770, 1 000, 800, 500 лет, для Средней Азии – 3 400, 1 600, 1 020, 680, 470, 330 лет. Расхождение в оценках периодов, полученных для разных районов не превышает 15%, что, по-видимому, сопоставимо с ошибками определения.

Вейвлеты

Непрерывным вейвлет-преобразование [154] функции

$f(t)$ называется величина

$$w(a, t) = C_\psi^{-1/2} a^{-\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{t' - t}{a}\right) \cdot f(t') dt', \quad (\text{A.1})$$

где a – параметр, характеризующий временной масштаб, $\psi(t)$ -функция, называемая анализирующим вейвлетом, C_ψ - нормировочная константа, σ - нормировочный коэффициент. Вейвлет представляет собой функцию с небольшим числом осцилляций и нулевым средним $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$ – это условие обеспечивает существование обратного преобразования.

Выбор конкретного вида вейвлета зависит от целей проводимого анализа. Для анализа спектра мы будем применять имеющий хорошее спектральное разрешение вейвлет Морле – $\psi(t) = e^{-t^2/2} e^{i2\pi\omega_0 t}$, а для локализации процессов во времени – вейвлет $\psi(t) = (1 - t^2)e^{-t^2/2}$, обычно называемый “мексиканской шляпой”.

Вейвлет-преобразование переводит функцию одной переменной t в плоскость двух переменных t и a . При этом t характеризует положение центра вейвлета на оси времени, а параметр a характеризует временной масштаб осцилляций, и в случае использования вейвлета Морле в представленном выше виде, совпадает с периодом колебаний. Аналогом спектра Фурье является так называемый интегральный вейвлет-спектр, получаемый при выборе $\sigma = 1/2$ интегрированием квадрата модуля вейвлет-

представления вдоль оси времени:

$$S(a) = \int_{-\infty}^{\infty} |w(a, t)|^2 dt. \quad (\text{A.2})$$

Отметим, что при вычислении вейвлет-преобразования возникает проблема краевых эффектов, существенных на расстояниях от края, меньших рассматриваемого масштаба a . Очевидно, что проблема тем острее, чем больше временной масштаб (или чем короче временной ряд). Такого же типа проблемы возникают при рассмотрении рядов, включающих пробелы в данных [149]. Мы используем ниже алгоритм, предложенный в работе [150] специально для анализа данных с пропусками. Идея метода состоит в перенесении проблемы пробелов с анализируемой функции $f(t)$ на анализирующий вейвлет ψ . Считая, что именно вейвлет известен на ограниченном интервале, мы корректируем его вид так, чтобы сохранить его спектральные свойства. Важно, что метод избегает какой бы то ни было интерполяции данных.

Результаты анализа

На рис. А.2 приведены интегральные вейвлет-спектры, полученные с помощью адаптивных вейвлетов Морле. Доминирующим максимумом во всех трех спектрах является пик, соответствующий периоду $a = 1750 \pm 50$ лет. Особенно хорошо он выражен в средне-азиатских данных. Отметим, что основное отличие адаптивных спек-

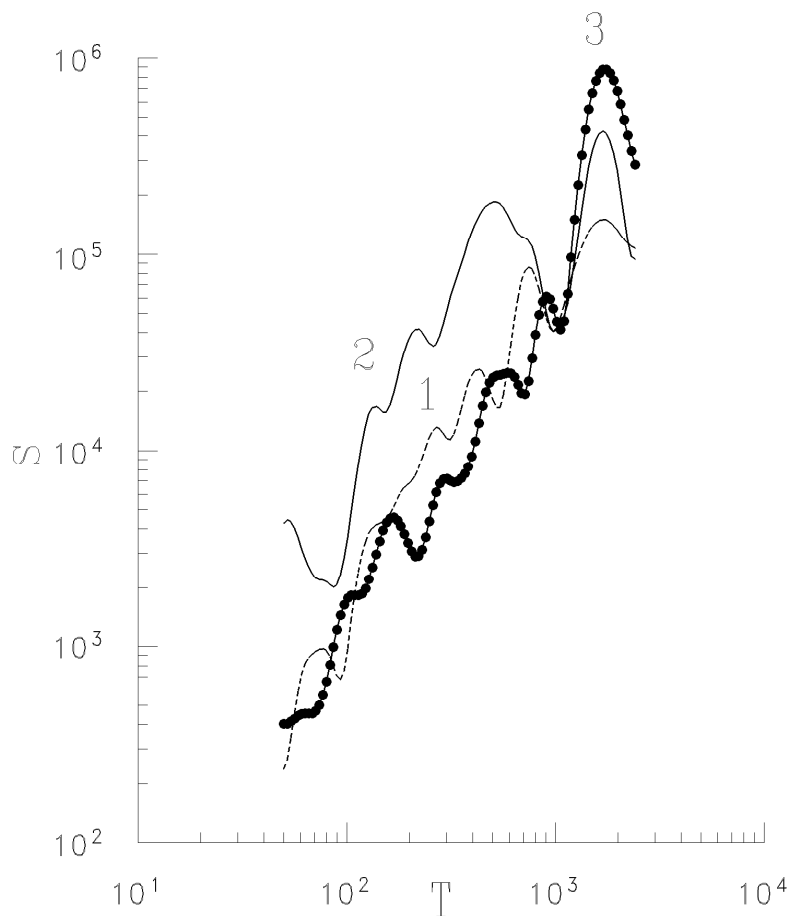


Рис. А.2: Интегральные вейвлет-спектры 1 – Болгария; 2 – Грузия; 3 – Средняя Азия.

тров от вейвлет-спектров, полученных по стандартной методике, состоит в том, что положение максимумов в области ≈ 1750 практически совпали.

Полученные спектры являются гораздо более гладкими, чем фурье-спектры, хотя последние также дают и значения характерных времен колебаний (1560 для Болгарии, 1770 для Грузии и Средней Азии, [151]), близкие к нашим оценкам в рамках вейвлет-анализа.

Распределение квадрата модуля вейвлет-коэффициентов показано на рис. А.3, где к периодическим процессам на рассматриваемом временном отрезке мы отнесем процесс с характерным временем 1750 лет, присутствующий в виде горизонтальной полосы на всех трех диаграммах. (На рис. А.3(4) приведена детализация распределения вейвлет-коэффициентов для Средней Азии.) Прослеживается также 750-летняя вариация за последние два тысячелетия для Болгарии. Вариация примерно такого же периода (период несколько меняется с течением времени) прослеживается, хотя и менее уверенно, для Грузии на протяжении всех четырех тысячелетий. Для Средней Азии на всем рассматриваемом временном интервале существует вариация с периодом 900 – 1000 лет, наиболее ярко проявляющаяся в I тыс. до н.э. – I половине I тыс. н.э.. Амплитуда номинальной пятисотлетней вариации (в Болгарии период этой вариации несколько меньше, а в Средней Азии несколько больше 500 лет) на протяжении четырех тысяч лет для всех территорий то усиливается, то ослабе-

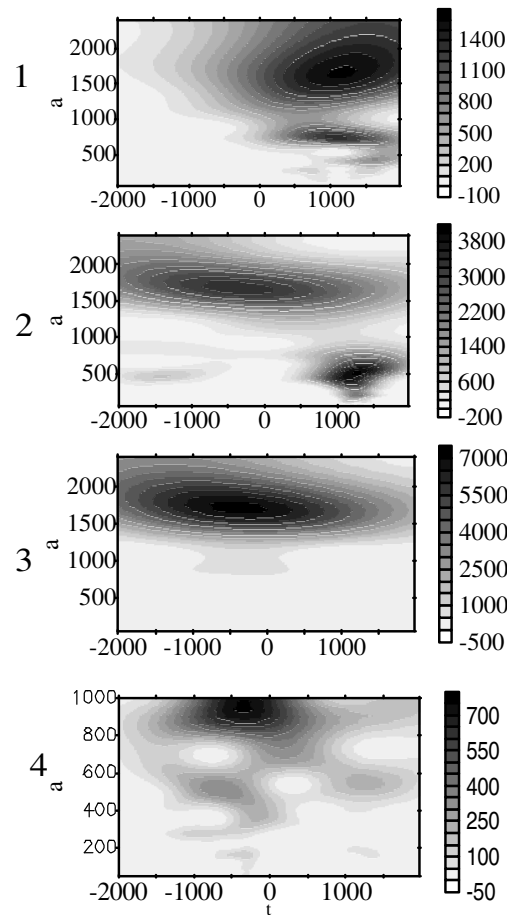


Рис. А.3: Диаграммы поведения спектральных коэффициентов адаптивных вейвлетов $w(a, t)$ 1 – Болгария; 2 – Грузия; 3, 4 – Средняя Азия.

вает. То, что номинальные семисотлетняя и пятисотлетняя вариации для Болгарии выделяются только в последние два тысячелетия, связано с недостатком данных для начала интервала наблюдений. Перерывы в проявлении 500-летней вариации в Грузии и Средней Азии не могут быть связаны с недостаточной информацией об изменении напряженности поля, т.к. и для Грузии и для Средней Азии временные интервалы, на которых не выявлена

эта вариация, являются участками, на которых кривые изменения напряженности поля получены с наибольшей подробностью. Для Грузии временной интервал затухания пятисотлетней вариации – II половина I тыс. до н.э. – начало нашей эры, для Средней Азии – первые три четверти I тыс. н.э.. Продолжительность этих интервалов и в том и в другом случае практически одинакова, однако для Грузии затухание вариации наступает раньше.

На рис. А.4, представлено поведение коэффициентов

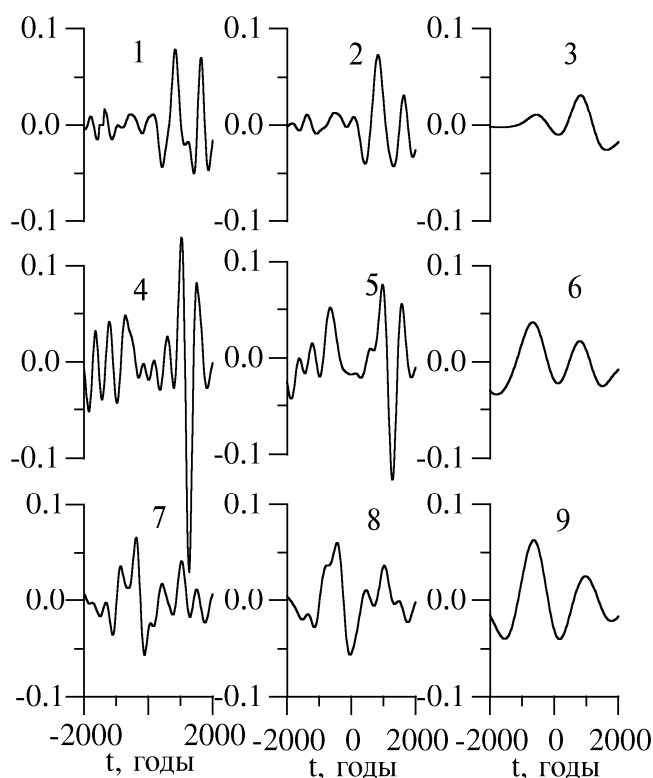


Рис. А.4: Поведение коэффициента $w(a = const, t)$ в вейвлет-разложении “мексиканская шляпа”: 1, 2, 3 – Болгария, $a=500, 700$ и 1750 лет, соответственно; 4, 5, 6 – Грузия, $a=500, 700$ и 1750 лет, соответственно; 7, 8, 9 – Средняя Азия, $a=500, 700$ и 1750 лет, соответственно.

$w(a = const, t)$ для вейвлета “мексиканская шляпа” для a , соответствующих номинальным 500-, 700- и 1750-летним вариациям для Болгарии, Грузии и Средней Азии. Для удобства сравнения амплитуд колебаний различной длительности мы используем здесь нормировку $\sigma = 1$, при которой вейвлет-коэффициенты измеряются в единицах, пропорциональных единицам измерения сигнала. Результаты, полученные по данным для Болгарии, относящиеся к временному интервалу до нашей эры, обсуждаться не будут в связи с недостаточной представительностью этих данных. Наиболее заметной особенностью проявления вариаций разных периодов в различных районах является большое сходство в проявлении 1750-летней вариации во всех трех районах и резкие различия в проявлении 700- и 500-летних вариаций в разных районах. Амплитуда 1750-летней вариации и для Грузии и для Средней Азии больше до нашей эры, чем после ее начала, причем в Грузии она меньше, чем в Средней Азии. Амплитуды 700- и 500-летних вариаций по данным для Грузии и Болгарии много больше в нашу эру, чем до нашей эры, а по данным для Средней Азии скорее можно говорить о большем размахе колебаний до нашей эры, чем в нашей эре. Причем амплитуды этих вариаций в Болгарии и Грузии (в нашей эре) существенно больше, чем в Средней Азии. Обратим внимание на резкий выброс вейвлет-коэффициента для Грузии вблизи X в н.э. Он соответствует резкому перепаду на кривой 1б в X в н.э. Некоторые из отмеченных осо-

бенностей протекания вариаций напряженности геомагнитного поля в разных долготных секторах уже отмечались ранее [151, 152]. Так при исследовании вариаций напряженности геомагнитного поля на территории Средней Азии в течение двух последних тысячелетий было показано, что уверенно выделяется вариация с периодом около 500 лет [153], а колебание с периодом примерно 700 лет имеет небольшую амплитуду (не выделяется как значимое). При включении в рассмотрение данных о вариации напряженности геомагнитного поля в первом тысячелетии до нашей эры [152] амплитуда 700-летнего колебания резко возросла, что позволило выделить его с большой степенью достоверности. Исследование “возмущенности”, т.е. изменения размаха колебаний напряженности геомагнитного поля во времени (в части, содержащей вариации с периодом менее 600 лет) было проведено на данных об изменении напряженности в районах Грузии и Болгарии за последние семь тысячелетий [155]. Было установлено, что имеют место пульсации возмущенности во времени. Максимальных значений амплитуда этих колебаний достигает в середине II тыс. до н.э., а минимальных в районе рубежа нашей эры.

Как видим, наблюдается разумное совпадение результатов вейвлет-анализа с данными фурье-анализа, но вейвлет-анализ дает возможность проследить изменение характеристик вариаций непрерывно во времени.

Определим комплексный коэффициент корреляции про-

цессов $f_1(t)$ и $f_2(t)$, имеющих соответствующие вейвлет-представления $w_1(a, t)$ и $w_2(a, t)$, как

$$\mathcal{C}(a) = \frac{\int w_1(a, t)w_2^*(a, t)dt}{(\int |w_1(a, t)|^2dt \int |w_2(a, t)|^2dt)^{1/2}}. \quad (\text{A.3})$$

Степень скоррелированности двух процессов на заданном временном масштабе a определяет модуль величины $\mathcal{C}(a)$, который может принимать значения от нуля до единицы. Фаза коэффициента $\mathcal{C}(a)$ определяет сдвиг (в радианах) для соответствующих спектральных составляющих двух процессов. На рис. А.5 приведены модули коэффициента корреляции $|\mathcal{C}(a)|$, вычисленные, соответственно, для трех пар данных: а) Болгария–Грузия; б) Средняя Азия–Грузия; в) Средняя Азия–Болгария. Видно, что корреляция падает с уменьшением периода колебания.

Для 1750 летнего цикла, который идентифицируется во всех рядах данных, можно определить фазовый сдвиг, пользуясь фазой коэффициента корреляций. Получаем, соответственно, 16° для рядов Болгарии и Грузии, 21° для Грузии и Средней Азии и 37° для Болгарии и Средней Азии (последнее значение есть сумма двух предыдущих, что согласуется с гипотезой о единой природе 1750 летнего цикла). Пользуясь приведенными выше географическими долготами для областей наблюдений (по широте все три области близки друг к другу), получаем угловое расстояние между ними и находим скорость с востока на запад распространения соответствующей волны $v \approx 0,2^\circ/\text{год}$.

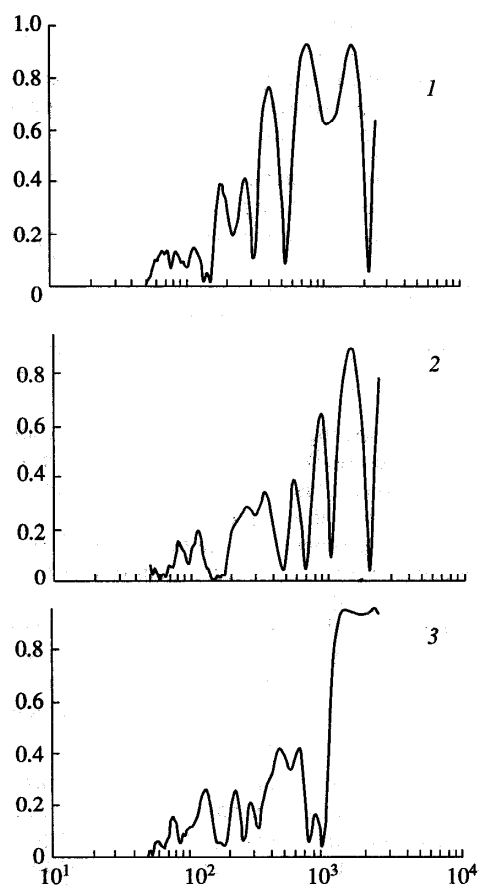


Рис. А.5: Модуль коэффициента корреляции вейвлет-разложений: 1 – Болгария-Грузия; 2 – Средняя Азия-Болгария; 3 – Средняя Азия-Грузия.

Выводы

Согласно проведенному анализу устойчивости временных спектров показано, что по имеющимся данным, с большей степенью надежности можно выделить 1 750-летнее колебание.

Колебания с периодами 700 и 500 лет прослеживаются во всех районах исследования, но имеют меняющиеся во времени характеристики. Момент “затухания” 500-

летней вариации в Грузии наступает раньше, чем в Средней Азии, что еще раз подтверждает наличие сдвига в картине изменения напряженности геомагнитного поля на поверхности Земли в зависимости от долготы района исследования.

Применение вейвлет-анализа позволяет проследить за изменениями характера вариаций, выраженностью (яркостью проявления) отдельных колебаний на различных отрезках времени, что открывает возможность с большей, чем до сих пор подробностью изучать морфологию вариаций геомагнитного поля.

Приложение В

Спектральный анализ палеомагнитных данных до и после инверсии Матуяма-Харамильо

Наиболее простые соображения позволяют связать характерное время памяти геодинамо с диффузионным магнитным временем $\tau_d \sim 10^5$ лет. Исходя из этого, можно было бы ожидать, что такие события, как инверсии будут оставаться порядка τ_d . Однако, данный факт, несомненно, по возможности, должен быть подвергнут тщательной экспериментальной проверке. Для этой цели рассмотрим спектральный анализ ряда палеомагнитных характеристик на интервале времени, содержащем инверсию Матуяма-Харамильо, см. подробнее [156, 25].

Важной особенностью рассматриваемых процессов (касается ли это поведения геомагнитного поля или причин, влияющих на изменение характеристик пород) является возможная нестационарность их временных спектров. Поэтому, вообще говоря, использование впрямую традиционных методов спектрального анализа в данном случае

неправомерно. На настоящий момент нет веских оснований считать, что спектры геомагнитных (климатических и др.) процессов с характерными временами до $\sim 10^5$ лет вызваны “стационарными” во времени факторами. Обычно в такой ситуации разбивают рассматриваемый интервал на несколько других меньшей длительности, для каждого из которых строят фурье- (или МЭМ-) спектры, и если получаемые спектральные пики не зависят от разбиения, спектр рассматривается как стационарный. Одним из недостатков такого подхода является зависимость результата анализа от способа разбиения на интервалы, каждый из пиков, в свою очередь, по своему реагирует на дробление интервала. Данная проблема остается нерешенной и в рамках СВАН-анализа [157], при котором фурье-анализ проводится в скользящем окне. Основной трудностью в этом случае является необходимость разложения нестационарного процесса по “стационарному” базису. Для исследований процессов с нестационарным во времени спектром в середине 80-х годов был разработан вейвлет-анализ, позволяющий эффективно проследить эволюцию спектров во времени [27, 158]. Отметим, что данный метод позволяет рассматривать временные последовательности с известными пропусками в данных [150], см. также его некоторые применения к палео- [159, 160] и археомагнитным данным [29]. В то же время, представляет интерес сравнение результатов, полученных при использовании различных методов анализа, что также рас-

смаатривается ниже.

Используемые данные описаны в [156, 25], далее же будет рассмотрен спектральный анализ полученных временных рядов.

МЕТОДИКА АНАЛИЗА

Анализируемые ряды приведены на рис. В.1, В.2. Полученные временные ряды различных данных анализировались с использованием метода максимальной энтропии (МЭМ) [161] и вейвлет-анализа [27]. При использовании метода максимальной энтропии на первой стадии при 5–10 различных значениях длины фильтра т.е., величина которого колебалась в пределах 30–70% общей длины ряда, выделялись основные периоды гармонических колебаний, суммой которых могут быть анализируемые ряды. В дальнейшем, с использованием метода градиентного спуска уточнялись значения периодов, определялись амплитуды и их значимость на 90% уровне значимости и фазовые характеристики выделенных колебаний [162]. Те же ряды данных подвергались вейвлет-анализу. Вейвлет-анализ позволяет изучать нестационарные в спектральном отношении процессы, следить за поведением фазы той или иной составляющей квазипериодического процесса, оценивать его энергетические характеристики. Получаемые при этом спектры являются более гладкими, чем спектры Фурье, в них подавлены кратные и комбинаци-

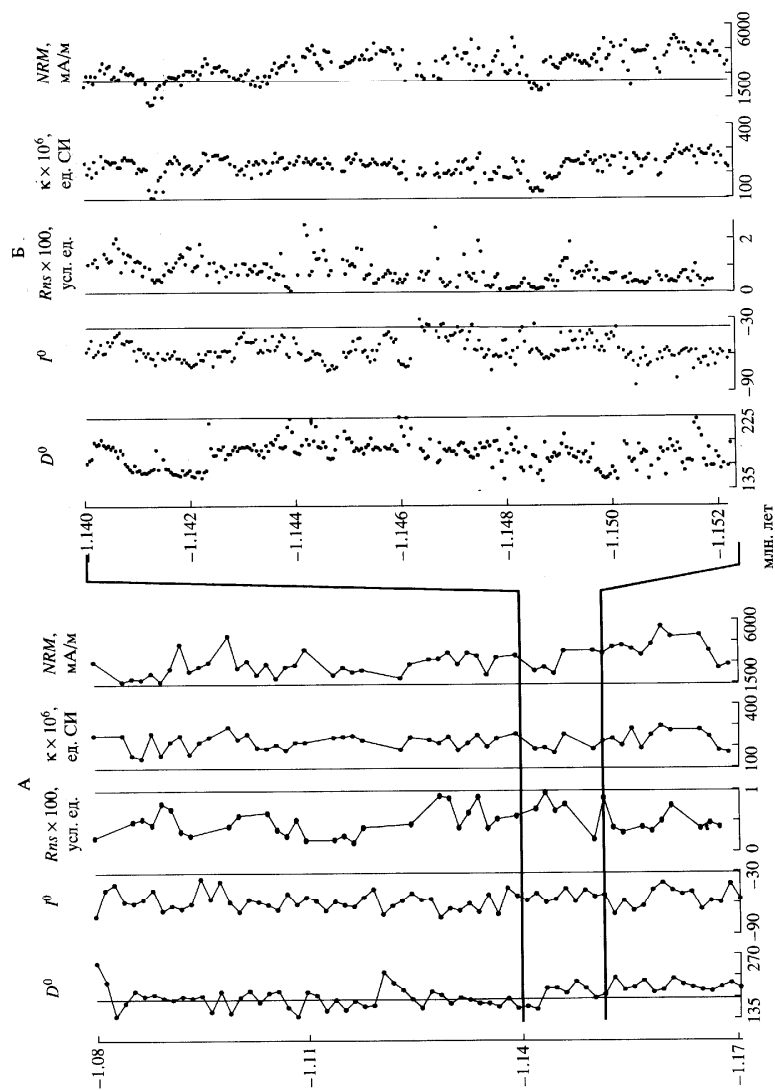


Рис. В.1: Палеомагнитные и магнитные характеристики пород хронозоны Матуйяма. А – 1 профиль, Б – 2 профиль; D и I – склонение и наклонение; $Rns = \Delta NRM / \Delta IRM$; κ – магнитная восприимчивость; IRM – нормальная намагниченность в поле 0.8 Тл. Показано положение разреза 2-ого профиля по отношению к 1-ому профилю. 228

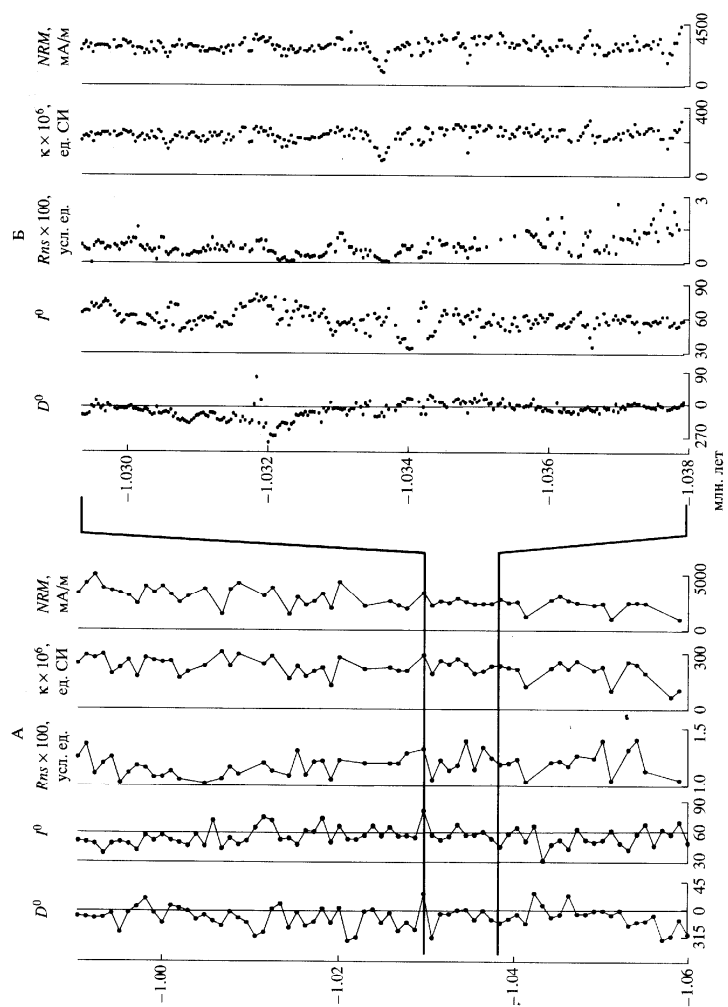


Рис. В.2: Палеомагнитные и магнитные характеристики пород субхронозоны Харамильо. Обозначения см. рис. В.1.

онные частоты.

РЕЗУЛЬТАТЫ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

А. Результаты МЭМ-анализа. Выделяемые при МЭМ-анализе пики в основном характеризуются большой устойчивостью к длине фильтра m . На рис. В.3 для примера приведены спектры для наклонения, полученные при анализе данных по 2-ому профилю (М). В таблицах В.4, В.5 сведены выделенные при МЭМ-анализе и уточненные методом градиентного спуска периоды для разных временных рядов. Данные для разных частей разреза условно сгруппированы по близости их временных характеристик. Жирным шрифтом выделены периоды, значимость амплитудной характеристики которых превышает 90%. Несомненно, объединение выявленных периодов, в первую очередь характеризующих изменение геомагнитного поля, условно и может быть несколько изменено.

Б. Результаты вейвлет-анализа. Отмечаемые на интегральном вейвлет-спектре пики сведены в таблицах В.5, В.6. Для ответа на вопрос о том, какие из этих пиков отвечают истинным периодичностям, мы рассмотрели вейвлет-разложение и $w(a, t)$ (в терминах вейвлет-анализа это соответствует горизонтальным структурам (рис. В.7 и В.8).

Спектр D . С большой степенью определенности к квазипериодическим можно отнести процессы, соответству-

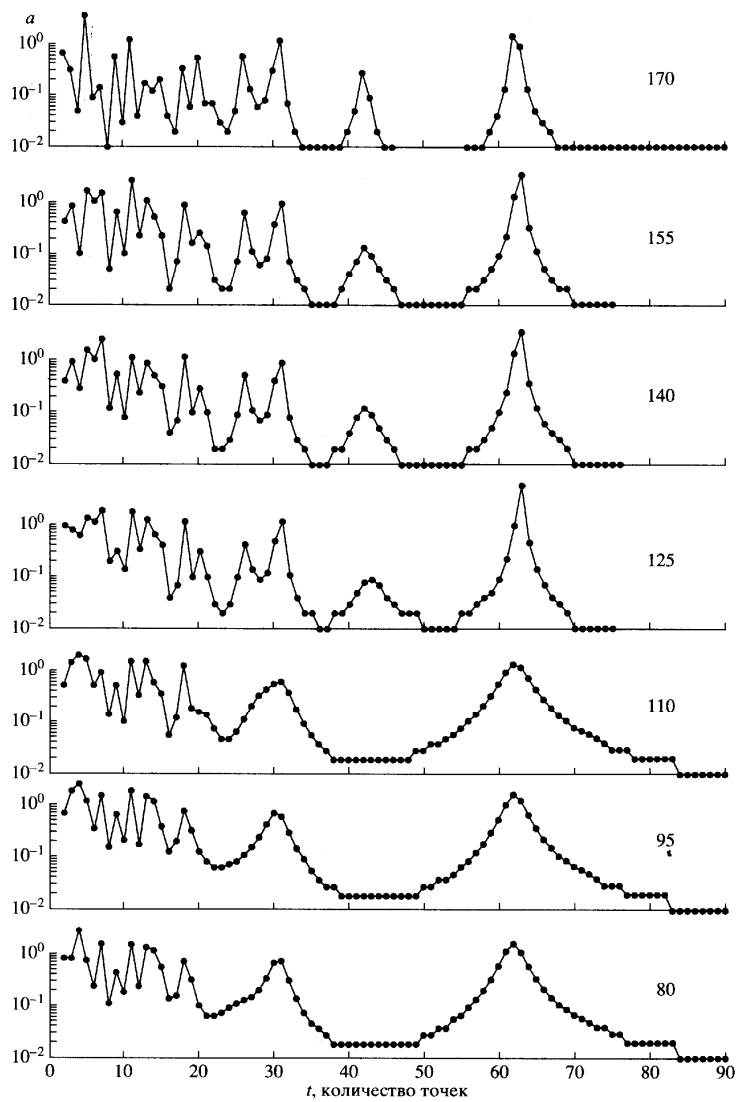


Рис. В.3: Спектрограммы наклонения для пород 2-ого профиля хронозоны Матуяма при различных значениях величины фильтра m .

| Хрон Матуяма | | | Субхрон Харамильо | | |
|------------------|------------------|-------------------|-------------------|------------------|-------------------|
| <i>D</i> | <i>I</i> | Напряженность | <i>D</i> | <i>I</i> | Напряженность |
| 62100/3.6 | 56700/2.1 | – | – | 53100/5.3 | – |
| – | – | 30200/0.22 | 40800/8.0 | – | – |
| 31800/5.0 | 25920/3.1 | – | – | 29100/1.7 | – |
| 19980/6.6 | 19660/1.6 | 21000/0.15 | 17250/6.5 | – | 20200/0.14 |
| – | 13180/3.1 | 13440/0.18 | – | 14400/1.0 | 13400/0.10 |
| 9830/6.7 | 11230/3.7 | – | – | 10320/1.7 | – |
| 7020/4.9 | – | 8820/0.12 | 7620/5.2 | – | 9200/0.08 |
| – | 5600/2.3 | –5100/0.18 | 5700/5.6 | 6080/3.6 | 6200/0.07 |
| 4200/8.0 | – | 4200/0.11 | 4000/4.2 | 4040/3.8 | 4000/0.05 |
| – | 3100/6.8 | – | – | 2620/3.7 | – |
| 1725/3.5 | 1850/1.7 | 2250/0.25 | 1840/6.5 | – | 2130/0.17 |
| – | 1470/4.0 | 1420/0.11 | 1410/4.9 | 1420/3.0 | 1520/0.18 |
| – | 1250/2.3 | – | 1180/3.0 | – | 1230/0.16 |
| 1130/2.8 | – | 1070/0.11 | – | 1050/3.1 | – |
| 910/2.8 | 885/2.3 | 930/0.16 | 820/5.5 | 860/3.0 | 960/0.07 |
| – | 830/3.1 | – | – | – | – |
| 715/2.6 | – | 740/0.09 | 700/4.3 | – | 700/0.10 |
| – | 640/3.4 | 680/0.11 | – | 660/1.8 | – |
| 515/2.6 | 540/2.5 | – | 570/4.2 | 550/2.3 | 520/0.14 |
| – | 430/1.5 | 460/0.06 | 450/3.4 | 450/2.6 | 440/0.11 |
| 330/2.6 | 320/1.5 | 320/0.13 | – | 340/2.3 | 370/0.06 |
| 185/2.5 | 205/1.5 | 235/0.06 | 210/2.6 | 230/1.0 | 200/0.08 |

Рис. В.4: Выделенные МЭМ анализом периоды (в годах)/амплитуды колебаний; значения амплитуд для склонения (*D*) и наклонения (*I*) – в градусах дуги большого круга, для напряженности – в относительных единицах ($Rns \times 100$); жирным шрифтом – значимость выделенных амплитуд больше 90%.

| МЭМ-анализ | | | | Вейвлет-анализ | | | |
|-------------------|-------|------------------------|-------|-------------------|-------|------------------------|-------|
| Хронозона Матуяма | | Субхронозона Харамильо | | Хронозона Матуяма | | Субхронозона Харамильо | |
| к | IRM | к | IRM | к | IRM | к | IRM |
| - | - | - | - | - | - | 38800 | 37700 |
| 29500 | - | - | - | - | 30750 | - | - |
| - | 21500 | 21000 | - | 21450 | 21450 | 19400 | - |
| 16500 | - | - | - | - | - | - | - |
| - | 14150 | 13700 | 13650 | 13300 | 14300 | 14700 | 14300 |
| - | 9950 | 10650 | - | - | - | - | - |
| 8000 | - | 7950 | - | - | - | - | 8900 |
| 7100 | 6700 | - | - | 7300 | - | 7550 | - |
| - | 5500 | - | 5000 | - | 5450 | - | - |
| 4300 | - | 4330 | 3820 | - | - | 4330 | 4330 |
| - | 2670 | 3100 | - | - | - | 2900 | 3225 |
| 2200 | - | - | - | - | - | - | - |
| 1730 | 1800 | 1650 | - | 1850 | 1650 | - | - |
| - | 1430 | 1450 | 1350 | - | - | - | - |
| 1220 | 1290 | 1260 | - | - | - | 1275 | - |
| 1030 | 1030 | 1100 | 1115 | - | 1020 | - | 1095 |
| 900 | 815 | 815 | - | 945 | - | - | - |
| 725 | - | - | 750 | - | - | - | - |
| - | 640 | 670 | - | - | - | - | 650 |
| 590 | - | 550 | 590 | - | 580 | - | - |
| 470 | - | 460 | 500 | - | - | 480 | - |
| - | 330 | 385 | 380 | 300 | 320 | - | 360 |
| - | 190 | 230 | 150 | - | 180 | - | 150 |

Рис. В.5: Выделенные МЭМ-анализом и вейвлет-анализом периоды, см. пояснения к таблице В.4.

ющие следующим пикам. Для хрона Матуяма: процесс с $a = 20\,700$ лет и процесс, начинающийся с $a = 1\,400$ лет и заканчивающийся с периодом $= 940$ лет для интервала $(-1\,150\,000 - -1\,140\,000)$ лет (рис. В.7А-1 и В.8А-1). Оба эти процесса отражены на интегральном спектре в виде пиков $1\,080, 1\,600, 20\,450$ лет. Можно также отметить существование структуры с $a = 9\,500$ лет в интервале t с $(-1\,140\,000 - -1\,090\,000)$ лет (рис. В.7А-1) и с $a = 4\,000$ лет (рис. В.8А-1), также отмеченные на интегральном спектре (табл. В.6). Для всего рассмотренного интервала субχροна Харамильо выделяется процесс с $a \approx 21\,000 \rightarrow 16\,000$ лет, ускоряющийся со временем,

| Хрон Матуяма | | | Субхрон Харамильо | | |
|--------------|----------|--------------------|-------------------|----------|--------------------|
| <i>D</i> | <i>I</i> | Напря- женность | <i>D</i> | <i>I</i> | Напря- женность |
| 39760 | - | - | 39780 | - | - |
| - | - | - | - | - | 30240 |
| - | 24080 | 26000 | - | 26300 | - |
| 20450 | - | - | - | - | 19300 |
| - | - | - | 17650 | - | - |
| - | - | 13600 | - | 15100 | 14300 |
| 9500 | 11200 | 9100 | - | - | - |
| 6700 | 7850 | - | - | - | - |
| - | - | 6000 | 5700 | 6200 | 6050 |
| 3900 | - | 4350 | - | - | - |
| 2750 | 3000 | - | - | 2900 | - |
| - | - | 2230 | - | - | 2000 |
| 1600 | 1410 | - | 1540 | - | 1500 |
| 1080 | - | - | - | 1125 | - |
| - | - | 900 | - | 900 | - |
| - | 660 | - | 750 | - | - |
| 540 | - | - | - | - | - |
| - | - | - | - | - | 450 |
| 320 | - | 320 | 345 | 360 | - |
| 190 | 180 | - | - | 180 | 170 |

Рис. В.6: Периоды (в годах), выделенные во временных рядах элементов геомагнитного поля при вейвлет-анализе.

и квазипериодический процесс, также ускоряющийся, с $a \approx 8400 \rightarrow 3900$ лет с максимумом на $-1\,010\,000$ лет. Не исключено существование процесса с $a \approx 39500$ лет (рис. В.7Б-1). Также необходимо отметить сингулярность в спектре, приходящуюся на $-1\,032\,000$ лет (на спектре (рис. В.8Б-1) это соответствует вертикальной структуре). Все остальные пики рассмотренных выше временных рядов скорее всего соответствуют локальным во времени событиям.

Спектр *I*. Для всего интервала для хрона Матуяма на диаграммах вейвлет-разложений (рис. В.7А-2) можно отметить существование двух-трех локальных событий с

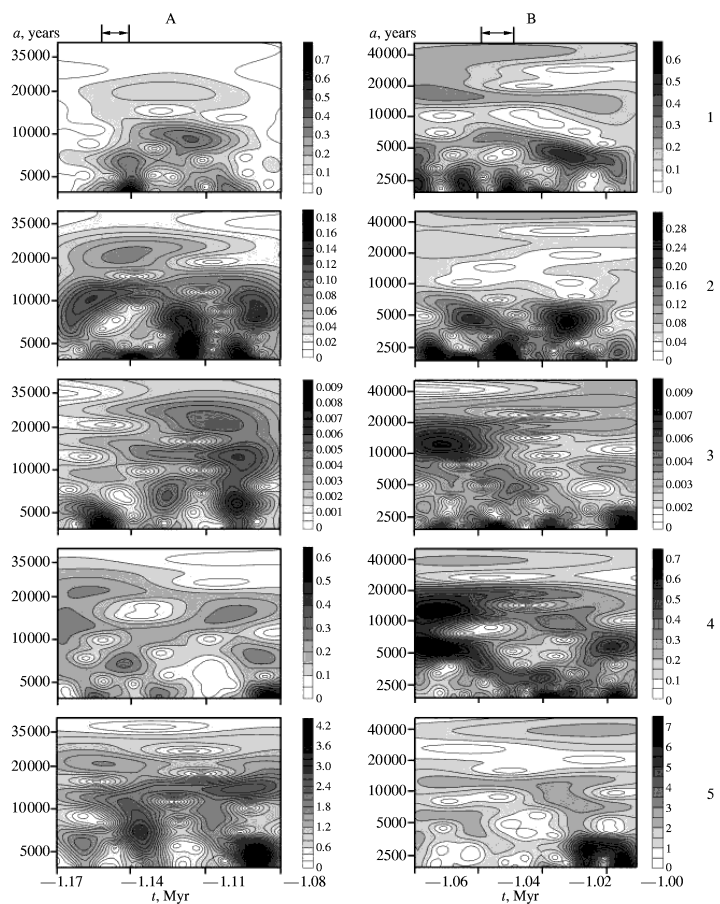


Рис. В.7: Диаграмма поведения спектральных коэффициентов адаптивных вейвлетов $w(a, t)$ для анализируемых данных 1-ого профиля. А – хронозона Матуяма, Б – субхрона Харамилью; 1 – D , 2 – I , 3 – Rns , 4 – κ , 5 – IRM ; a – период, логарифмический масштаб, t – время, линейный масштаб. Стрелками показано положение второго профиля по отношению к 1-ому профилю. В колонках справа – относительная амплитуда выделяемых процессов.

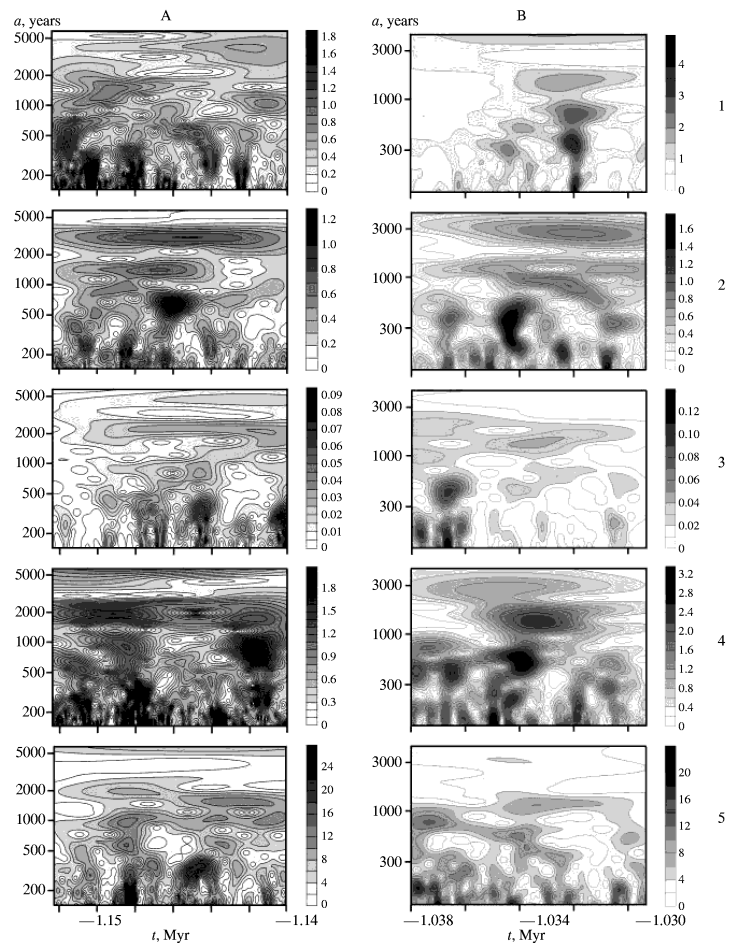


Рис. В.8: Диаграммы поведения спектральных коэффициентов адаптивных вейвлетов $w(a, t)$ для анализируемых данных 2-ого профиля. Условные обозначения – см. рис. В.7.

$a \in (8\,400 - 15\,000)$ лет, которые можно интерпретировать как квазипериодический процесс со средним периодом $a \approx 11\,000$ лет, а также структуры с $a \approx 22\,400$ лет с максимумом в спектре на $t \approx -1\,145\,000$ лет. Кроме того, выделяется сингулярность с $a \approx 700$ лет (рис. В.8А-2), квазипериодический процесс на интервале $t \in (-1\,150\,000 - -1\,145\,000)$ лет с $a \approx 1\,400$ лет и структура с $a \approx 2\,800$ лет. На всем интервале субхрона Харамильо вейвлет-разложение для I (рис. 4Б-2) является более изрезанным по сравнению с аналогичным разложением для D (рис. В.7Б-1). Можно говорить лишь о слабо выраженном процессе с $a \approx 26\,000$ лет, процессе с $a > 40\,000$ лет, не отмеченном на интегральном вейвлет-спектре, и наличии нескольких локальных максимумов на вейвлет-плоскости. Для отдельного интервала субхрона Харамильо (рис. В.8Б-2) существует слабая периодичность с $a \approx 1\,125$ лет и наложенный на нее процесс с $a \approx 1\,125 \rightarrow 900$ лет. На этом графике также заметен процесс с $a \approx 3\,000$ лет и сингулярность на $t \approx 1\,034\,000$ лет.

Спектр Rns. Для хрона Матуяма на вейвлет-разложении отметим процессы с $a \approx 18\,000 \rightarrow 14\,000$ лет и $a \approx 22\,400 - 28\,000$ лет (рис. В.7А-3), а также локальных событий с $a \approx 330$ лет, слабые периодичности с $a \approx 2\,200$ лет и $4\,400$ лет и структуру с $a \approx 900$ лет (рис. В.8А-3). Для субхрона Харамильо – локального события ($a \approx 14\,300$ лет, $t \approx -1\,050\,000$ лет) и на его фоне двух слабых периодичностей с $a \approx 19\,300$ и $29\,400$ лет (рис. В.7Б-3) и гори-

зонтальной структуры с $a \approx 1\,125 - 2\,250$ лет (рис. В.8Б-3).

Спектр κ . На вейвлет-плоскости для хрона Матуяма мы наблюдаем лишь набор слабо выраженных пятен на вейвлет-плоскости (рис. В.7А-4), хорошо выделяется лишь процесс с $a \approx 1\,900 - 2\,350$ лет (рис. В.8А-4). Для субхрона Харамильо отметим два локальных события с $a \approx 7\,600$ и $14\,300$ лет с $t = -1\,050\,000$ лет), периодичности на фоне последнего с $a \approx 19\,300$ лет и слабую периодичность с $a \approx 38\,600$ лет (рис. В.7Б-4). Также можно отметить события с $a \approx 525$ и $1\,275$ лет с $t \sim -1\,034\,000$ лет и периодичность с $a = 2\,850$ лет (рис. В.8Б-4).

Спектр IRM. Для хрона Матуяма (рис. В.7А-5) можно отметить структуру с $a \approx 14\,000$ лет и локальное событие ($a \approx 3\,900$ лет, $t = -1\,090\,000$ лет). Крупномасштабный спектр сильно изрезан (рис. В.8А-5), возможно существование процесса $a \approx 1\,900 \rightarrow 1\,400$ лет. Для субхрона Харамильо - структуры $1\,125$, $13\,450$ и $38\,000$ лет и локального события ($a \approx 4\,200$ лет с центром в $t \approx -1\,000\,000$ лет) (рис. В.7Б-5 и В.8Б-5).

Наиболее четко прослеживаемые периоды, полученные в результате вейвлет-анализа, приведены в табл. В.9.

ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ ДАННЫХ

1. Сравнение интегральных характеристик. Данные, по-

лученные в результате проведенных анализов, приведены в табл. В.4–В.6. Совместное использование результатов двух различающихся по заложенным в них принципам методов позволяет более объективно оценить эти результаты. Как видно из их сравнения, за редким исключением при МЭМ-анализе выделяется большее количество колебаний. В редких случаях колебания, выявленные в результате вейвлет-анализа, не находят аналогов в результатах МЭМ-анализа. Корреляции совпадения данных разных методов со значимостью амплитуд колебаний в МЭМ-анализе не наблюдается. Сопоставление выделенных при МЭМ-анализе колебаний с вейвлет-диаграммами позволяет охарактеризовать практически каждое колебание с точки зрения его морфологии. Однако, в силу нестационарности рассматриваемых процессов, вывод о которой следует из анализа вейвлет-диаграмм, не все полученные пики могут соответствовать реальным периодичностям. В связи с этим, проводить анализ изменения поля на основании данных, полученных при МЭМ-анализе и выделенных по интегральным спектрам вейвлет-анализа, нам представляется нецелесообразным. Отметим лишь, что в высоко- и среднечастотной части спектра колебания величин, характеризующих геомагнитное поле этого времени, по данным обоих анализов в общем подобно спектру вариаций, выделяемых при археомагнитных исследованиях [31]. Для ответа на вопрос, какие из этих периодов с наибольшей вероятностью соответствуют фи-

зическим процессам, необходимо изучить эволюционные характеристики спектров по вейвлет-диаграммам.

2. Вейвлет-диаграммы. Соответствующие вейвлет-диаграммы поведения спектров $w(a, t)$ приведены на рис. В.7, В.8. Основной чертой диаграмм является существование большого числа локальных во времени событий (сингулярностей) (см. также временное поведение рассматриваемых величин на рис. В.1, В.2). Поскольку продолжительность многих событий сравнима с характерным временем процессов или меньше их, такие процессы нельзя считать истинными периодичностями. В табл. В.9 приведены характерные времена процессов, наблюдаемых на временных интервалах, больших соответствующего характерного времени процесса a . В среднем, только 1/5 из полученных периодичностей, приведенных в табл. В.4–В.6, прошла проверку на устойчивость во времени и может быть отнесена нами к постоянно наблюдаемым периодическим процессам. На основе выделенных таким образом спектров (табл. В.9) сравним основные черты поведения поля до и после инверсии Матуяма-Харамильо. Временные спектры элементов, характеризующих геомагнитное поле (D, I, Rns), как и их амплитуды, различаются до и после инверсии Матуяма-Харамильо. Приблизительно лишь половина из наблюдаемых периодов до инверсии наблюдается после переполюсовки поля и наоборот. Это различие может иметь двойкую причину: во-первых, оно может быть вызвано недостатками, присущими самим дан-

| | Хрон (хронозона) Матуяма | Хрон (хронозона) Харамильо |
|------------|-----------------------------|-------------------------------|
| <i>D</i> | 1400 → 940 | - |
| | 4000 | - |
| | 9500 | 8400 → 3900 |
| | 20700 | 21000 → 16000 |
| <i>I</i> | - | 39500 |
| | 1400 | 900-1125 |
| | 2800 | 3000 |
| | 11000 | - |
| | 22400 | 26000 |
| <i>Rns</i> | - | >40000 |
| | 330 | - |
| | 900 | - |
| | 2200 | 1125-2250 |
| | 4400 | - |
| <i>k</i> | 18000 → 14000 | 19300 |
| | 22400-28000 | 29400 |
| | 1900-2350 | 2850 |
| <i>IRM</i> | - | 19300 |
| | - | 38600 |
| | 1900 → 1400 | 1125 |
| | 14000 | 13500 |
| | - | 38000 |

Рис. В.9: Наиболее четко выделяемые периоды (в годах) при анализе вейвлет-диаграмм.

ным (неравномерной скоростью осадконакопления, пропусками в данных и т.д.); во-вторых, сам факт эволюции временного спектра не противоречит теории геодинамо, которая объясняет существование характерных времен (200 000 лет и более) [163, 164], превышающих по длительности рассмотренные в данной работе. Другими словами, рассмотренные интервалы времени могли оказаться слишком короткими, чтобы характеристики поля восстановились до своего стационарного значения и выявлен-

ные различия действительно отражают истинное изменение характеристик поля, связанное с инверсией. На этот вопрос более уверенно можно будет ответить после анализа характеристик поля в непосредственной близости к инверсии и во время инверсии, изучения более продолжительных временных рядов и подтверждения полученных результатов при исследовании других разрезов. Различие в спектрах до и после инверсии наблюдается для некоторых периодов и для скалярных магнитных характеристик горных пород исследованных частей хронозон. Во многих исследованиях эти изменения связываются с климатическими процессами [45]. В частности, в зоне Матуяма отсутствуют периоды 19 300 и 39 000 лет в изменениях магнитной восприимчивости и 38 000 лет – величины IRM, присутствующие в зоне Харамильо. Возможно, что некоторые из наблюдаемых для этих характеристик изменений являются причиной аналогичных вариаций компонент магнитного поля, хотя спектры вариаций геомагнитного поля по археомагнитным данным и изменений климата во многом подобны (особенно для средних частот). Для разных компонент поля периоды не всегда совпадают. Этот факт может быть объяснен различной пространственной морфологией компонент магнитного поля (наличием симметрий) и также не вызывает противоречий при интерпретации [165]. Наблюдается ряд ускоряющихся процессов с уменьшающимся во времени $a(t)$. Отметим, что на более длительных временных интервалах по-

добное ускорение процессов в изменениях геомагнитного поля было отмечено в работах В.Н. Вадковского (частное сообщение).

ВЫВОДЫ

1. В целом интегральные спектры вейвлет-анализа, полученные осреднением по времени соответствующих вейвлет-диаграмм, повторяют основные черты спектров МЭМ-анализа. Однако, анализ устойчивости спектров во времени заставляет отбросить большое число (в среднем 4/5) выявленных периодичностей, являющихся, вероятно, отражением сингулярности квазипериодического поведения рядов.
2. Полученные спектры являются дискретными.
3. В среднем, только половина из надежно установленных периодов в изменениях характеристик различных элементов геомагнитного поля каждого изученного временного интервала совпадает между собой.
4. Приблизительно такая же картина наблюдается при сравнении спектров элементов поля до и после инверсии, что, возможно, отражает изменение в режиме работы геодинамо во время инверсии Матуяма-Харамильо. Для решения вопроса об устойчивости этого изменения необходимо изучение более продол-

жительных временных рядов и получение данных о спектрах в непосредственной близости к инверсии до и после нее.

Приложение С

Дрейф фокусов вековой вариации

Более подробно с данным вопросом и обзором литературы можно ознакомиться в [166, 167], здесь же остановимся лишь на основных результатах.

В настоящее время вековые вариации с характерными временами порядка 100 лет связывают с процессами, происходящими на границе ядро-мантия, поскольку все ниже лежащие источники эффективно экранируются проводящим жидким ядром. Одним из ярких проявлений поля вековой вариации являются фокусы вековой вариации (ФВВ).

Для того, чтобы изучить эволюцию ФВВ во времени, мы построим карты изолиний поля вековой вариации нормальной компоненты магнитного поля \dot{Z} с интервалом в пять лет на период 1840–1990 гг. Для их построения используем интерполяцию по времени с шагом в 2.5 года для производных по времени коэффициентов Гаусса h_n^m и g_n^m , т.е. \dot{h}_n^m и \dot{g}_n^m . Подробнее с используемыми наблюдательными данными можно ознакомиться в [168]. По ре-

результатам моделирования построим карты изолиний поля \dot{Z} на поверхности Земли на сетке (ϕ, θ) , содержащей 80×40 точек. Таким образом, расстояние между соседними точками составит 4.5° . На каждой из карт отметим текущее на данный момент времени положения ФВВ и далее проследим за их движением. Существуют различные методы определения дрейфа геомагнитного поля (см. обзор [169]) и предложенный выше метод не является самым точным. Однако, поскольку, во-первых, в дальнейшем нас будет интересовать движение лишь самих ФВВ, а не спокойных областей, и во-вторых, сами данные не обладают высокой точностью, мы ограничимся упомянутым выше визуальным наблюдением за их движением. На рис. С.1 изображен дрейф ФВВ в западном направлении, где прямые линии представляют собой линейные аппроксимации движения ФВВ, а цифры - среднюю скорость в единицах $^\circ/\text{год}$ (знак минус соответствует западному направлению дрейфа). Как видно из рисунка, полученные скорости западного дрейфа близки к современным оценкам для западного дрейфа недипольной компоненты магнитного поля, составляющей $0.1 \div 0.2^\circ/\text{год}$. Это значение может быть несколько заниженным по сравнению с некоторыми региональными оценками хотя бы из-за наличия регионов с преобладающим восточным дрейфом. Отметим, что скорость дрейфа обычно определяется для самого магнитного поля, пусть и недипольного, и не обязана совпадать со скоростью дрейфа его производной по времени. Обратим

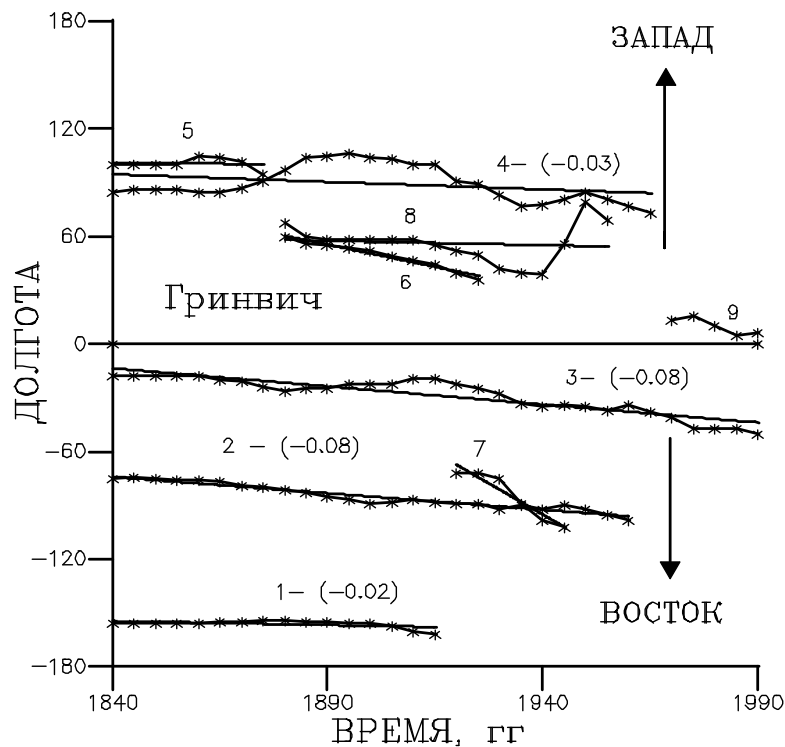


Рис. С.1: Западный дрейф фокусов вековой вариации. Цифры 1-9 соответствуют номеру фокуса. Прямые линии и цифры в скобках представляют собой линейные аппроксимации дрейфа и его скорость в единицах $^{\circ}$ /год для соответствующих фокусов.

особое внимание на рис. С.2. В отличие от преобладающего одного (западного) направления (см. рис. С.1), здесь наблюдается симметрия скоростей полярного дрейфа относительно плоскости экватора. Часть ФВВ имеют скорости дрейфа в направлении полюсов, причем их полярные скорости в $1.5 \div 2$ раза больше соответствующих скоростей западного дрейфа. Напомним, что явление полярного дрейфа отмечалось для Z компоненты магнитного поля в [170, 171, 172] при использовании мировых данных, а

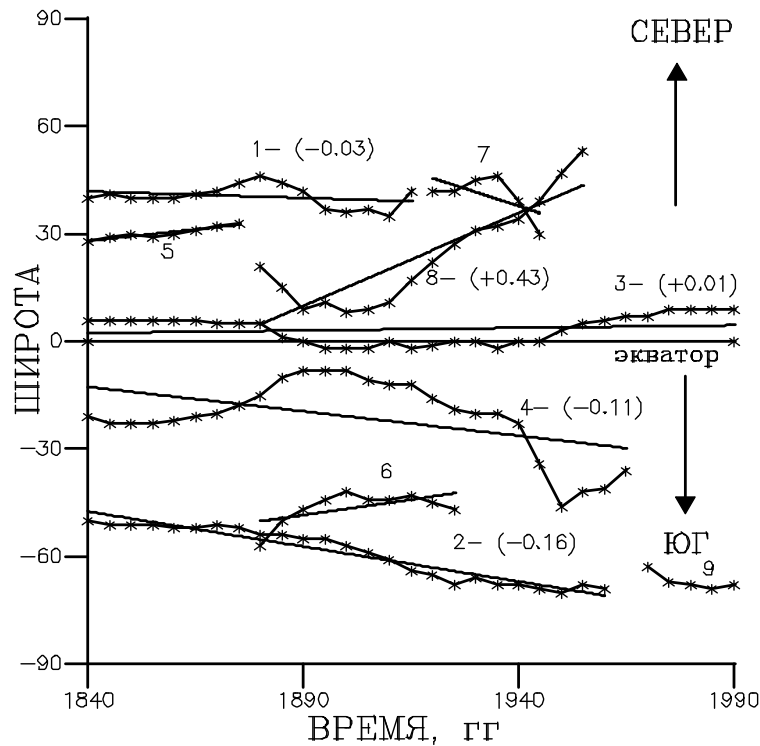


Рис. С.2: Полярный дрейф фокусов ФВВ, см. пояснения к рисунку С.1.

также в работе [173] для регионов. По характерному времени жизни и склонности к дрейфу ФВВ можно условно разделить на 2 группы (см. таблицу С.1):

1. ФВВ, существующие не менее 100 лет и дрейфующие в западном и (или) полярном направлениях (ФВВ $N_{\underline{0}1-4}$).
2. ФВВ с временем жизни меньшим 30–40 лет, о движении которых трудно что-либо утверждать (ФВВ $N_{\underline{0}5-9}$).

Как уже упоминалось выше, полярный дрейф наблюдался для недипольной компоненты геомагнитного поля

| $N_{\text{ФВВ}}$ | Западный дрейф | Полярный дрейф |
|------------------|----------------|----------------|
| 1 | Н | Н |
| 2 | Д | Д |
| 3 | Д | Н |
| 4 | Н | Д |
| 5 | К | К |
| 6 | К | К |
| 7 | К | К |
| 8 | К | К |
| 9 | К | К |

Таблица С.1: Степень подвижности фокусов вековой вариации. Буквы в таблице означают: Д – наблюдается дрейф; Н – дрейф не наблюдается; К – время существования фокуса мало.

[170, 172], и рядом авторов были предприняты попытки связать его с выносом динамо-волн, генерируемых в основном объеме ядра на его поверхность [50]. Отметим, что динамо-волны наиболее изучены применительно к солнечным пятнам. Поэтому, для дальнейшего изложения напомним основные результаты (см., например, работы [4, 48]). Как известно, солнечные пятна представляют собой вынос трубок магнитного поля в фотосферу Солнца. При этом основания трубок находятся в конвективной зоне, в которой, собственно, и происходит генерация магнитного поля. В местах повышенного магнитного поля, связанного с магнитной силовой трубкой, температура жидкости меньше, поэтому светимость в этой области фотосферы меньше. Подобное зацепление с низлежащими слоями позволяет объяснить избыток азимутальной скорости пятен относительно соседних областей, ко-

торый составляет $\approx 3 \div 4\%$ [48]. Большое количество вынесенных магнитных трубок интерпретируется наблюдателями как скопление солнечных пятен. Еще в середине XIX века был отмечен широтный дрейф скоплений солнечных пятен, имеющий принципиально иную, по сравнению с азимутальным дрейфом, природу. Впервые движение скоплений солнечных пятен в направлении к экватору было объяснено Паркером [174]. Согласно этой работе, в неограниченном объеме турбулентной жидкости, в котором действует $\alpha\omega$ -динамо, могут существовать динамо волны с периодом, сравнимым с основным периодом солнечного цикла ≈ 22 лет. Их распространение в полярном направлении (Y) подчиняется условию: $\alpha \frac{\partial \omega}{\partial r} K_y > 0$, где α - средняя спиральность, $\frac{\partial \omega}{\partial r}$ - дифференциальное вращение, а K_y - проекция волнового числа \mathbf{K} в направлении северного полюса. Полагая, что в северном полушарии $\alpha \frac{\partial \omega}{\partial r} < 0$, получим: $K_y < 0$ и движение происходит к экватору. Поскольку $\alpha(z)$ нечетная, а $\omega(z)$ - четная функции, получим $K_y > 0$, т.е. также движение к экватору. Таким образом, скорость движения скоплений солнечных пятен в фотосфере к экватору соответствует фазовой скорости распространения динамо-волны в конвективной зоне (передача момента движения происходит посредством того же зацепления, что и в случае азимутального дрейфа). Отметим, что солнечные пятна лишь визуализируют динамо-волну, поскольку время жизни пятна много меньше характерного времени солнечного цикла.

Если попробовать применить это объяснение к земному динамо, то определенным выбором параметров жидкого ядра Земли, действительно, можно получить фазовые скорости для этих волн, сравнимые со скоростями западного дрейфа. Но поскольку полученные осциллирующие решения являются решениями динамо средних полей, т.е. в них уже проведено осреднение по всему объему генерации, то и полученное решение должно носить глобальный, по всей Земле, характер, в отличие от магнетогидродинамических неустойчивостей, типа МАК волн, имеющих локальный характер. Так как описанные выше колебания (динамо-волны) происходят с нулевым средним, то это должно приводить к смене полярности среднего поля. Напомним, что на Солнце это соответствует наблюдаемому характерному периоду 22 года. Однако, характерное время смены полярности геомагнитного поля составляет $10^4 \div 10^6$ лет, что значительно превышает характерное время рассматриваемого нами явления.

Приложение D

Гармонический анализ палеомагнитных данных

Изучение истории геомагнитного поля, его изменений с разными характерными временами подразделяется на несколько этапов, каждый из которых имеет свои трудности и свои еще не решенные вопросы. Первый этап – это отбор необходимой для решения поставленного вопроса коллекции. Речь идет, конечно, не о технической стороне отбора, а о выяснении, где может быть отобрана нужная коллекция. Отдельным вопросом является датировка – определение возраста пород выбранного разреза и временного интервала, за который накапливалась часть разреза, использованная для отбора коллекции. Эти два вопроса – подбор разреза пород и его датировка – решаются внешними по отношению к палеомагнитологии методами. Далее идет этап лабораторного изучения отобранной коллекции: определение, из каких компонент складывается естественная остаточная намагниченность, выяснение, какая из выделенных компонент является первичной, и, нако-

нец, “чистка” всей коллекции, в результате которой в руках исследователя оказываются ряды значений величины и угловых элементов первичной намагниченности.

Остается последний этап – выделение периодов вариаций, записанных в рядах палеомагнитных данных, для чего служит тот или иной метод гармонического анализа. Обычно используется метод максимальной энтропии (МЭМ), иногда предварительно весь набор вариаций определяется по анализу Фурье. Периоды выделенных МЭМ вариаций некоторые авторы уточняют методом градиентного спуска. При этом формально задача выделения периодов вариаций, записанных в разрезе осадочных пород, может считаться решенной, однако возникает ряд скрытых вопросов, не ответив на которые нельзя считать, что выделенные периоды адекватно отражают реальные изменения геомагнитного поля.

Временные последовательности, естественно, ограничены. При их анализе принято использовать фильтры. Применение фильтров влечет за собой изменения амплитуды пиков вплоть до исчезновения некоторых пиков, резкое изменение соотношения амплитуд выделенных пиков, появление новых пиков и, пожалуй, самое неприятное – расщепление пиков и их смещение.

В качестве иллюстрации к сказанному на рис. D.1 приведены данные из статьи Крира [175]. В рядах наклона выделяются при всех фильтрах кроме “5D” периоды 45-50 т.л., 17-20 т.л., и 12-14 т.л. Период 9 т.л., близкий

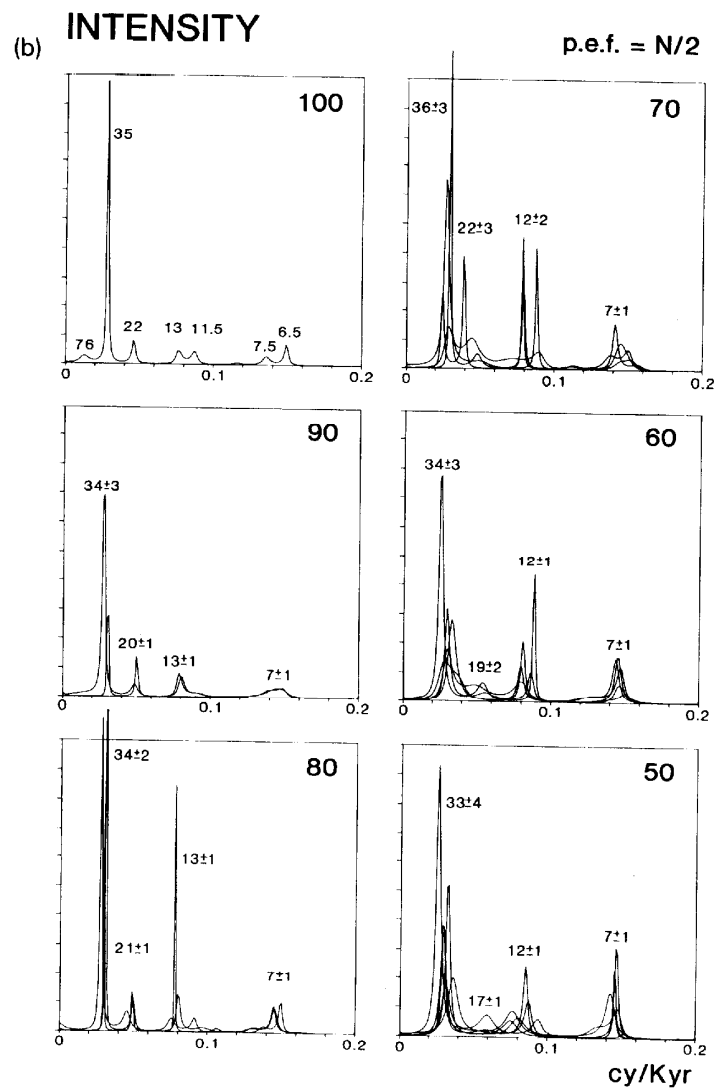


Fig. 9 (continued).

Рис. D.1: МЭМ-анализ вариаций палеонапряженности геомагнитного поля и его угловых элементов. Рисунок заимствован из работы [175].

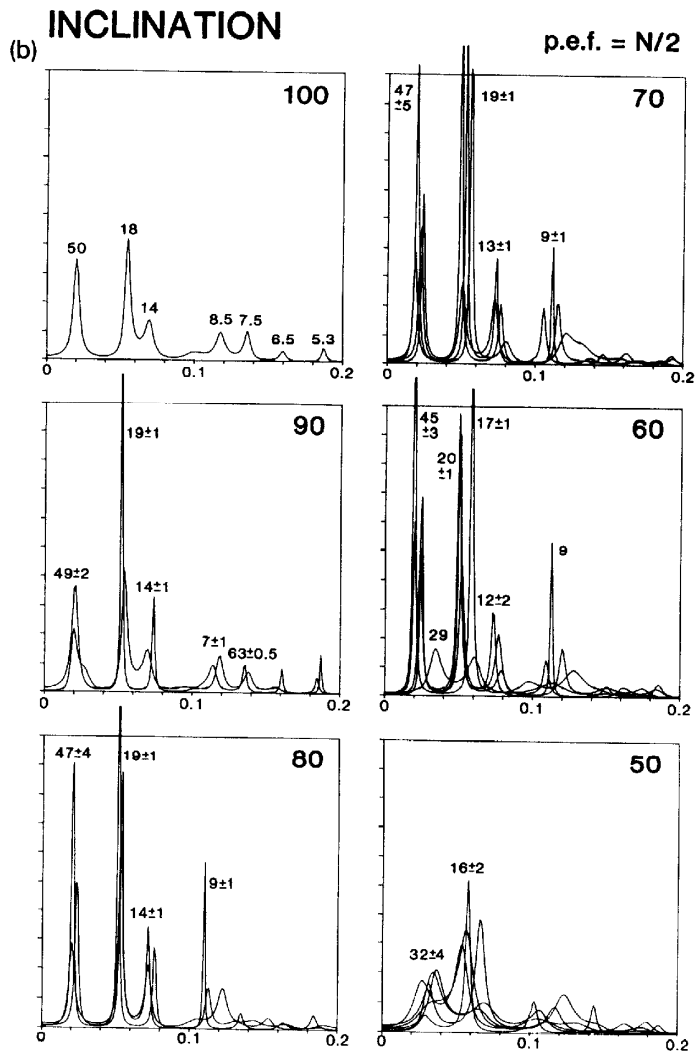


Рис. D.2: Продолжение рис. D.1

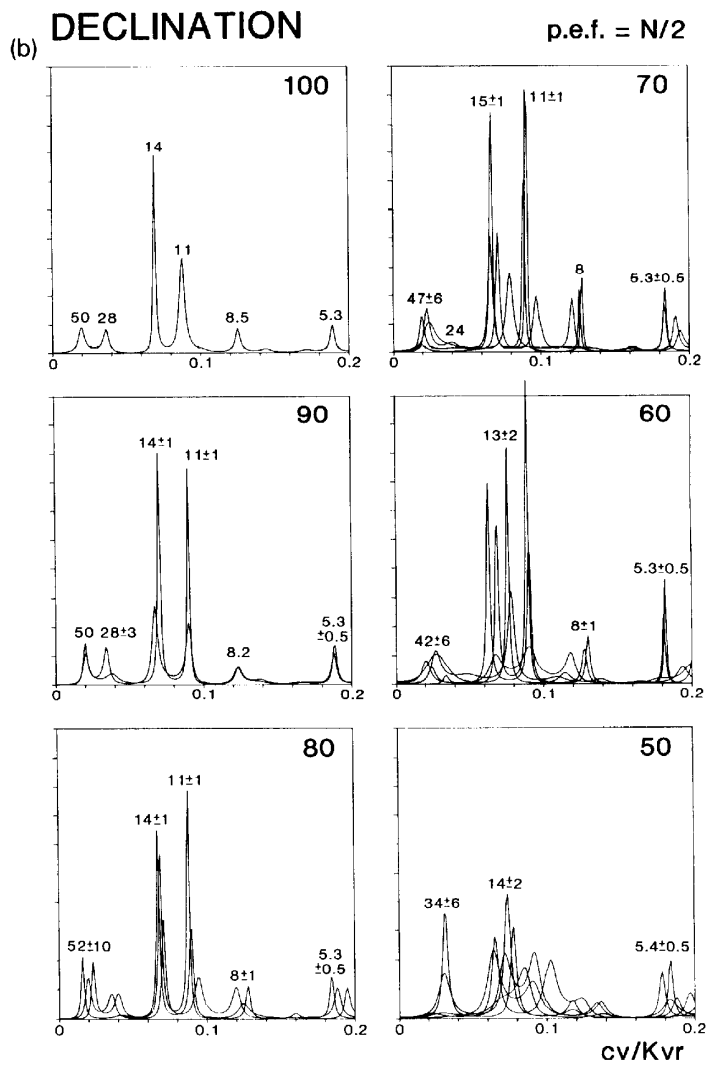


Рис. D.3: Продолжение рис. D.1

к периоду изменения магнитного момента для последних тысячелетий, выделяется в трех случаях из шести. Как относиться к нему? Является ли его отсутствие при трех фильтрах отражением несовершенства анализа или, наоборот, его присутствие при фильтрах 60, 70, 80 – это артефакт, а реально основная вариация магнитного момента Земли имела период не 9 ± 1 т.л. как последнее время, а 13 ± 1 т.л.?

На примере этой же статьи можно показать и вторую часто встречающуюся особенность, смущающую исследователей: в рядах склонения и наклонения выделяются разные периоды. В ряде D слабо выражены периоды 42-50 т.л. и 9 ± 1 т.л., отсутствует, период 17-20 т.л., появляется, правда с низкой амплитудой период 5.3 т.л. Четко прослеживаются периоды 14 ± 1 т.л. и 11 ± 1 т.л., но при фильтре 60 они расщепляются на серию пиков 11-15 т.л., а при фильтре 50 составляют размытую группу пиков вокруг 14 ± 2 т.л.

Второй пример можно взять из статьи [176], где для изучения вариаций геомагнитного поля был использован исключительно благоприятный для палеомагнитных исследований разрез осадочных пород возраста 160-230 т.л. В ряду D с использованием фильтра Блекмана-Тьюки были выделены пики 23, 34-38, 50-53, в ряду I – 16, 25, 31, 46-48. В Таблице D.1 приведены эти же вариации в единицах лет. Археомагнитными исследованиями вариации, составляющие дискретный спектр, нанесенный в ле-

| Археом. ряд | D | I | Q |
|-------------|------------------|------------------|------------------|
| 600 (900) | – | – | 750 |
| 1 200 | – | $1\,200 \pm 50$ | $1\,200 \pm 50$ |
| 1 800 | $1\,700 \pm 150$ | $1\,850 \pm 50$ | $1\,850 \pm 100$ |
| 2 700 | $2\,700 \pm 50$ | $2\,300 \pm 100$ | – |
| 3 600 | $3\,950 \pm 250$ | $3\,400 \pm 200$ | $3\,700 \pm 200$ |
| 5 400 | $5\,200 \pm 200$ | – | 5 000 |
| 9 000 | – | – | 10 500 |
| – | $3 \cdot 10^4$ | – | $2,5 \cdot 10^4$ |

Таблица D.1: Сравнение вариаций, выделенных в рядах D, I, $J_n(Q)$, разреза Арапи (озеро Севан, Армения) с вариациями дискретного спектра, определенного по сумме археоманнитных данных.

вой колонке, определяются с точностью до 10%. Таким образом вариации в ряду D в пределах ошибок определения совпадают со спектром по археоманнитным данным. Но три вариации 600, 1 200 и 9 000 в ряду D не записаны. В ряду I не записаны вариации 600 и 5 400л. и вместо вариации $2\,700 \pm 270$ л. присутствует вариация $2\,300 \pm 100$ л.; она на грани суммарной ошибки, соответствующей археоманнитным данным, но ее отличие от данных ряда D выходит за пределы суммарной ошибки. Стоит еще раз подчеркнуть, что коллекция сама по себе обеспечивала вероятность правильных результатов: ферромагнитная фракция состояла из магнетита, анизотропия отсутствовала, вязкость пренебрежимо мала.

И наконец, можно привести таблицу из работы [177], где палеоманнитная запись получена в том же районе (Армения, озеро Севан) и для того же отрезка времени, (последние 2 000 лет) для которых имеются археоманнитные данные. В Таблице D.2 можно видеть отсутствие в

| Уровни пиков | | | | SV | SV | По прямым и археом. дан., годы |
|--------------|-------|-------|----------------------|------------|------------|--------------------------------|
| D | I | J_n | Град. спуск | уровни | годы | |
| 7 | 7 | 7 | 6,5 | 7 | 170 | 180 |
| – | – | 9 | 8,7 | 9 | 230 | – |
| 10-12 | 11 | 11-13 | 10,7 | 11 ± 1 | 280 | – |
| 14-16 | 15 | 15 | 15 по I 13,7 по D | 15 ± 1 | 390 356 | 360 |
| – | 21 | – | – | 20 ± 1 | | |
| 26 | 26 | 26 | 25,6 | 26 ± 2 | 660 | 600 |
| 32 | 32-35 | 32 | 35 по J_n | 32 ± 2 | 910 | 900 |
| – | 52 | 54 | – | 53 ± 2 | 1 400 | 1 200 |

Таблица D.2: Приведены уровни рядов, на которые приходятся пики (колонки 1, 2, 3), уточнение положения пиков методом градиентного спуска (колонка 4), суммарный результат анализа (колонка 5), перевод выделенных периодов в годы при скорости осадконакопления, равной 1 уровень/26 лет, (колонка 6), и вариации дискретного спектра, определенные с точностью $\pm 10\%$ в результате статистической обработки всей суммы археомагнитных данных.

ряду D пиков 20 и 52, записанных в ряду I, а также присутствие в угловых элементах пика 10.7, соответствующего периоду 280 лет. Такой период не выделяется ни по археомагнитным данным, ни, что более существенно, по обсерваторным записям.

Описанная выше несогласованность палеомагнитных данных – разные периоды вариаций в рядах угловых элементов и их отличие от археомагнитного ряда и прямых наблюдений требует обсуждения этого вопроса.

Ниже на примере ряда моделей SV мы рассмотрим механизм появления кратных частот, а также попробуем прояснить вопрос о несогласованности спектров напряженности и угловых элементов магнитного поля. Проблемы, связанной с конечностью длины ряда, мы касаться не будем.

Спектральные свойства компонент магнитного поля

Магнитное поле Земли генерируется течениями проводящей жидкости во внешнем ядре Земли. В первом приближении геомагнитное поле можно представить в виде крупномасштабной (дипольной) компоненты и наложенных на нее мелкомасштабных полей. Известно (см., например, [178]), что временной спектр наблюдаемого магнитного поля имеет дискретную структуру. Поле диполя участвует в двух процессах: величина диполя осциллирует с периодом, равным периоду основного динамомеханизма $T_0 \sim 10^4$ л. и амплитудой порядка половины величины диполя. Направление диполя прецессирует вокруг географической оси [31] со скоростью, соответствующей скорости западного дрейфа, так что один оборот магнитного диполя вокруг оси вращения равен $T_1 \sim 1\,200$ л. В спектре недипольного поля различают целый набор периодов (см., например, [179, 24]): 20, 30, 60, 90, 120, 360, 450, 600, 1 200, 1 800, 2 400, 3 600, 4 800 л. Отличительной особенностью этого ряда является существование кратных гармоник. Интересным является также то, что часть из присутствующих периодов в одних компонентах поля, например, в X , Y или Z , не присутствуют в записях его угловых элементов: наклона, I и склонения, D .¹ Поскольку каждая из компонент в свою очередь отражает процессы, происходящие в жидком ядре, знание истинно-

¹Здесь X , Y , Z – восточная, северная и вертикальная компоненты магнитного поля.

го временного спектра источников SV на границе является одной из важнейших задач геомагнетизма. Для того, чтобы прояснить этот вопрос, в данной работе рассмотрен ряд моделей SV и изучены спектральные свойства генерируемого ими магнитного поля на поверхности Земли для различных компонент поля в приближении непроводящей мантии.

Пусть на поверхности жидкого ядра $R = r_c$ задано некоторое магнитное поле $\mathbf{V}_o(\mathbf{r}, \theta, \varphi)$, где (r, θ, φ) – сферическая система координат. В предположении непроводящей мантии в мантию проникает лишь B_r – компонента. В мантии магнитное поле подчиняется уравнению Лапласа: $\nabla U = 0$, где $U = \nabla \cdot \mathbf{V}$ – скалярный потенциал. Решение на поверхности Земли $R = a$ ищется в виде ряда:

$$U(a, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{r_c^{n+2}}{a^{n+1}} (g_n^m \cos m\varphi + h_n^m \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta),$$

где g_n^m, h_n^m – коэффициенты Гаусса, рассчитанные на поверхности жидкого ядра r_c , P_n^m – присоединенные полиномы Лежандра. Тогда на поверхности Земли поле \mathbf{V} имеет компоненты: $X = -B_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}$, $Y = B_\varphi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi}$, $Z = -B_r = \frac{\partial U}{\partial r}$. Поскольку X -, Y - и Z -компоненты связаны с U линейным преобразованием, то очевидно, что и спектральный состав при переходе от U к \mathbf{V} остается неизменным. Однако компоненты поля X, Y и Z редко поддаются измерениям и известны лишь за последние 200 лет. В большинстве случаев известна полная напря-

женность магнитного поля $F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, а также его угловые элементы: наклонение, $\sin I = \frac{Z}{F}$ и склонение, $\sin D = \frac{Y}{H}$, где $H = \sqrt{X^2 + Y^2}$ – горизонтальная компонента поля.

Рассмотрим вначале спектральные свойства напряженности поля F . Пусть поле, задаваемое на поверхности жидкого ядра, пропорционально $\sim 1 + \varepsilon \sin \omega_0 t$ ($\varepsilon > 0$), тогда напряженность на поверхности ядра равна $F_0 = |1 + \varepsilon \sin \omega_0 t|$. Данная функция не является дифференцируемой (имеет изломы) при $\varepsilon > 1$ и ее Фурье спектр слабо спадает при $\omega > \omega_0$. Если же нам все-таки необходимо исследовать спектральные свойства источника, то лучше иметь дело с квадратом F_0 : $F_0^2 = 1 + 2\varepsilon \sin \omega_0 t + \varepsilon^2 \sin^2 \omega_0 t = 1 + 2\varepsilon \sin \omega_0 t + \varepsilon^2(1 - \cos 2\omega_0 t)/2$. Для этой функции спектр уже легко вычисляется и имеет два экстремума: $\omega = \omega_0$ и $2\omega_0$. В предельных случаях $\varepsilon \gg 1$ и $\varepsilon \ll 1$ имеем экстремумы $\omega = 2\omega_0$ и $\omega = \omega_0$, соответственно.

На поверхности Земли при вычислении F необходимо учитывать уже три компоненты магнитного поля, с различным средним по времени. Даже при поле, сравнимом по величине с современным, указанный выше эффект может иметь место, так, например, восточная компонента магнитного поля X меняет свой знак с характерным временем западного дрейфа (период прецессии) $T_1 \sim 1\,200$ л. В эпохах с пониженным значением напряженности магнитного поля появление удвоенной частоты может быть уже вызвано всеми тремя компонентами магнитного по-

ля.

Правило. Если *a priori* известно, что на рассматриваемом интервале времени при построении F могли присутствовать эффекты “отражения” для какой-либо из компонент поля, то исследование спектральных свойств лучше проводить для F^2 , а не для F .

Другой причиной, приводящей к искажению спектра источника SV , являются эффекты интерференции. Пусть

$Z_o = 1 + \varepsilon [\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t]$. Тогда $F_o^2 = \overbrace{1 + 2\varepsilon(\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t)}^1 + \overbrace{2\varepsilon^2 \sin^2 \omega_1 t + \sin^2 \omega_1 t}^2 + \overbrace{2\varepsilon^2 \sin \omega_1 t \sin \omega_2 t}^3$, где первый член имеет спектр исходного сигнала, второй связан с удвоением частоты, а третий, интерференционный, $\sin \omega_1 t \sin \omega_2 t = 0.5[\cos(\omega_1 - \omega_2) - \cos(\omega_1 + \omega_2)]$, описывает появление новых членов одинакового порядка по ε со вторым членом и имеет частоты $\omega = \omega_1 - \omega_2, \omega_1 + \omega_2$.

Рассмотрим подробнее свойства спектров угловых элементов I и D . Поскольку и числитель и знаменатель этих функций является периодической функцией (с различным средним по времени и различным спектром), спектр I и D претерпевает еще большие изменения относительно исходного спектра $U_o SV$. К сожалению, предложенное выше **Правило** не приводит к существенному ослаблению этих искажений. Ниже приведены некоторые аналитические оценки, показывающие основные черты спектров I и D .

Рассмотрим некоторую функцию w , представимую в виде произведения двух функций s и g , с соответствующими преобразованиями Фурье S и G . Образ Фурье W для w задается сверткой:

$$W(\omega) = S(\omega) * G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega') G(\omega - \omega') d\omega'.$$

Пусть $g = 1/\sin \omega_0 t$. Тогда выражение для G имеет вид [180]:

$$G = 2\pi i \sum_{j=0}^{\infty} [\delta(\omega - 2\omega_0 j - \omega_0) - [\delta(\omega + 2\omega_0 j + \omega_0)]],$$

представляющее собой ряд по ω_0 . Когда $g = 1/(1 + \varepsilon \sin \omega_0 t)$ задача сводится к некоторому большому, но конечному числу пиков (см. следующий параграф).

Взятие свертки приведет к дополнительному увеличению числа пиков в W . Напомним, что спектр S_w процесса w связан с W соотношением: $S_w = WW^*$, где $*$ – комплексное сопряжение. Полученное большое число пиков теперь уже может быть связано не только с эффектами “отражения” и интерференции, но и с тем, что, по сути, мы измеряем уже величины (I и D) с временными спектрами.

Модели SV

Как следует из предыдущего параграфа, точное аналитическое выражение для спектров F_0 при заданном спектре U_0 удастся выписать лишь в предельных случаях $\varepsilon \rightarrow$

0, $\varepsilon \rightarrow \infty$. Оценим величину ε для Земли по отношению амплитуды наблюдаемых на поверхности Земли колебаний F с периодом порядка 10^3 л. к амплитуде напряженности полного поля [178, 179, 31]: $\varepsilon \sim F_{T_1}/F_{T_0}$, и примем $\varepsilon \sim 10^{-1}$. Оценка ε по отношению $g_1^0/\sqrt{g_1^1{}^2 + h_1^1{}^2}$, представляющего собой отношение амплитуд пульсаций диполя к величине его прецессионных колебаний, дает $\varepsilon \sim 0.2$, что соответствует величине угла наклона оси диполя к оси вращения равной 10° . Далее мы рассмотрим ряд численных моделей SV на которых проследим основные закономерности спектров компонент магнитного поля в случае $\varepsilon \sim 0, 2$:

I. Волны, распространяющиеся вдоль экватора вида $Z_0 = e^{-3(\theta-\pi/2)^2}[\sin(2\varphi + \frac{2\pi}{\tau_1}t) + \sin(\varphi + \frac{2\pi}{\tau_2}t)]$, где $\tau_1 = 360$ л. и $\tau_2 = 600$ л.

а) Рассмотрим вначале задачу с нулевым средним по времени. На рис. D.4 представлены спектры $Z, F, I D$ в точке ($\theta = 70^\circ, \varphi = 0^\circ$), полученные с использованием быстрого преобразования Фурье. Если для Z существует лишь два максимума, то уже для F мы видим несколько ярко выделенных пиков, вызванных эффектами отражения и интерференции, а также пилообразный, спадающий при малых значениях периода (эффекты отражения), участок спектра. Отметим, что положения пиков здесь не соответствуют их положению в спектре исходного сигнала, представляя результат отражения и интерференции. Для угловых элементов доминирующими яв-

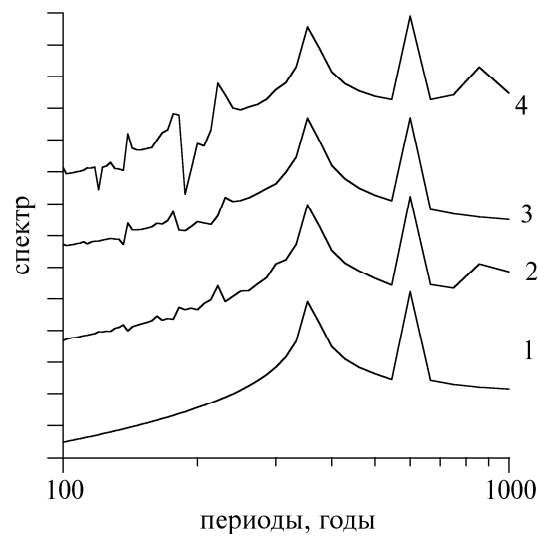
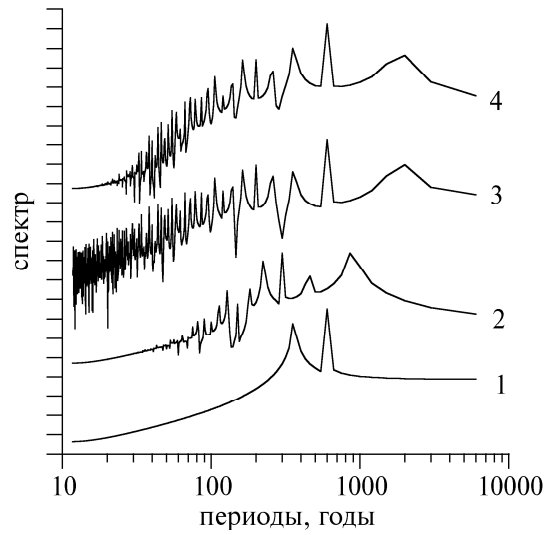


Рис. D.4: Спектр в модели МАК-волн; 1 – Z , 2 – F , 3 – D и 4 – I с нулевым средним по времени – верхний рисунок, и ненулевым средним – нижний рисунок. Значения представлены в двойном логарифмическом масштабе. Каждое деление по ординате соответствует десятикратному увеличению относительной величины спектра.

ляются частоты исходного сигнала, так как числитель в них имеет тот же спектр, что и исходный сигнал, а искажения вносимые знаменателем $\sim \varepsilon$.

б) Рассмотрим влияние ненулевого среднего по времени для сигнала на спектральные свойства. Для этой цели дополнительно к модельному сигналу варианта (а) добавим постоянное во времени дипольное решение ($g_1^0 = 0.5$), так чтобы отношение амплитуды колебаний напряженности к своему среднему по времени на поверхности Земли было сравнимо с наблюдаемым $\varepsilon \sim 0,2$. Характерной чертой полученных спектров (см. рис. D.4) является малое количество ложных пиков, их небольшая амплитуда, едва ли поддающаяся измерению в реальных условиях, а также значительное более гладкое поведение спектра при малых значениях периода.

Итак, при измерении спектра не самого источника, а F , I и D результат существенно зависит от относительной величины среднего по времени сигнала источника. При пониженных значениях среднего значения поля ($\varepsilon \ll 1$) наблюдаемые спектры величин F , I и D ² имеют мало общего со спектром источника, в то время как уже при $\varepsilon \sim 0.2$, что соответствует современному состоянию, эти спектры близки.

В рассмотренных выше примерах мы использовали одинаковые по амплитуде сигналы волн на поверхности ядра. В действительности, амплитуды этих волн могут суще-

²Мы здесь не касаемся вопроса, что понимать под I и D в моменты, когда величина дипольной компоненты поля становится сравнимой с недипольной.

ственно отличаться. В этом случае мы вправе ожидать, что более сильные (чаще это длиннопериодные составляющие поля) могут давать существенный вклад в энергетику короткопериодной части спектра. С другой стороны, некоторые компоненты поля, например, восточная компонента поля Y не чувствует осесимметричных изменений поля, однако это вовсе не означает, что спектр D не будет иметь гармоник кратных осесимметричной частоте источника. Для прояснения этих вопросов далее мы рассмотрим модели в которых существуют разные по амплитуде и пространственной конфигурации составляющие.

II. Осциллирующий прецессирующий диполь (OPD): $g_1^0 = 1 + 0,5 \sin \frac{2\pi}{T_0} t$, $g_1^1 = \frac{\sqrt{3,5}}{15} \sin \frac{2\pi}{T_1} t$ и $h_1^1 = \frac{\sqrt{3,5}}{15} \cos \frac{2\pi}{T_1} t$. Здесь коэффициенты (g_n^m, h_n^m) выбраны так, чтобы амплитуда колебания с основным периодом $T_0 = 10^4$ л. была в два раза меньше его среднего по времени значения, а амплитуда колебаний I и D , соответствующая периоду прецессии $T_1 = 1200$ л., была равной $\sim 10^\circ$. К основным чертам полученных спектров (см. рис. D.5) можно отнести следующие: сохранение свойств спектра для F ; отношение энергий E_1/E_0 в спектре I , приходящихся на периоды T_1, T_2 , соответственно, равно ~ 100 , что соответствует отношению амплитуд 10; полное отсутствие осесимметричной компоненты поля в спектре D ; существование цуга гармоник около T_1 с пиками, превосходящими в случае наклона I амплитуды пика, соответствующего T_0 . Отметим, что с точки зрения наблюдателя, основным изме-

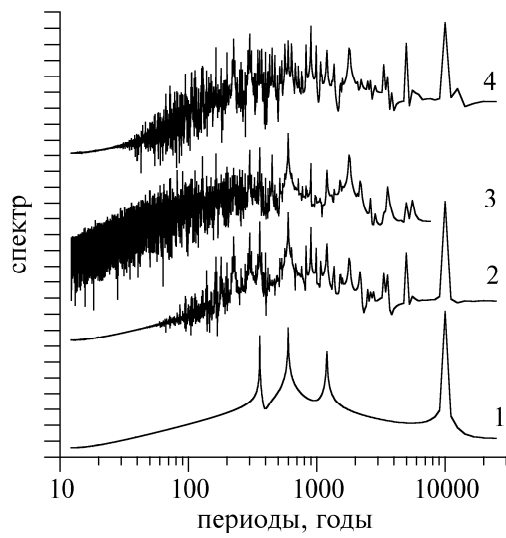
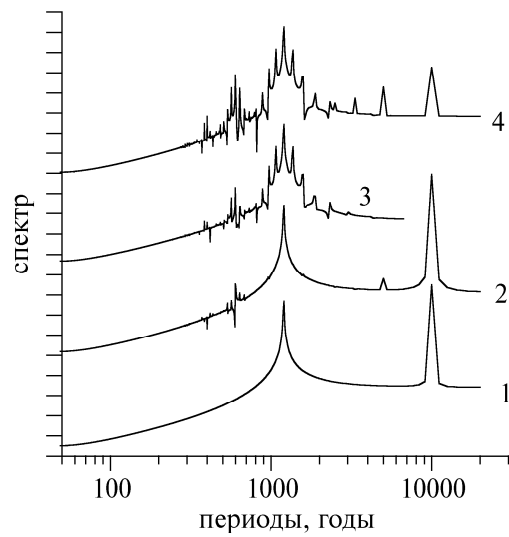


Рис. D.5: Спектр в модели OPD; – верхний рисунок, и спектр, полученный в результате суперпозиции МАК-волн и колебаний диполя, приведенных на рис. D.4 – нижний рисунок.

нением в спектре будет ослабление I (исчезновение D) пиков, соответствующих осесимметричной составляющей T_0 . Другие изменения будут слишком слабы, чтобы быть измерены при имеющейся точности измерений. Это однако не мешает им стать существенными в случае сравнимых по амплитуде колебаний, как это уже было показано на примере модели I(a).

Поскольку в действительности могут присутствовать оба из рассмотренных выше варианта, то в следующем примере мы рассмотрим суперпозицию МАК-волн (вариант I) и колебаний OPD (вариант II), приводящую к большему числу интерференционных составляющих спектра.

III. Объединяет модель I и II. Спектр исходного сигнала представлен колебаниями OPD с периодами $T_0 = 10^4$ л., $T_1 = 1\,200$ л., на фоне которых существуют колебания с периодом $\tau_1 = 360$ л., $\tau_2 = 600$ л., см. рис. D.5. Для спектра напряженности F мы наблюдаем появление сравнимого по величине с другими, колебания с периодом ~ 900 л., некоторого перераспределения энергии между уже имеющимися колебаниями, а также появление высокочастотной части спектра. В целом та же картина наблюдается и для I . Отличие для D составляет, как и прежде, подавление осесимметричного колебания с периодом T_1 и как следствие этого, отсутствие интерференционной компоненты с периодом ~ 900 л.

Поскольку отдельные детали спектров могут существенно зависеть от конкретных значений T_0 , T_1 , τ_1 , τ_2 , то далее

мы не будем сопоставлять каждый из полученных пиков с известным из наблюдений колебанием. Главным здесь представляется приведенные выше общие закономерности в изменении спектров. Основной рекомендацией при изучении спектральных свойств имеющихся временных последовательностей является тщательное сопоставление спектральных свойств всех компонент магнитного поля с последующим моделированием источников SV в каждом конкретном случае отдельно. Также, здесь необходимо отметить, что только лишь по различию временных спектров напряженности и угловых элементов магнитного поля еще нельзя делать вывод о влиянии климата на формирование намагниченности исследуемых элементов.

Выводы

Рассмотрен ряд моделей поля вековой вариации, представляющих собой суперпозицию МАК-волн и колебаний прецессирующего диполя. Показано что временные спектры генерируемого ими магнитного поля могут по-разному интерпретироваться на поверхности Земли в зависимости от того, мерится ли каждая из компонент магнитного поля, его полная напряженность или его угловые элементы.

Приложение E

Свободные моды затухания уравнения Навье-Стокса

Рассмотрим уравнение Навье-Стокса в оболочке $r_1 \leq r \leq r_0$, (далее $r_1 = 0.4$ и $r_0 = 1$):

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p + \Delta \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (\text{E.1})$$

с $\mathbf{u} = 0$ при $r = r_1$ и $r = r_0$. Представим поле скорости \mathbf{u} в виде суммы полоидальной и тороидальной компонент: $\mathbf{u} = \mathbf{u}^P + \mathbf{u}^T$. Тогда

$$\frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial t} = \Delta \mathbf{u}^T, \quad \frac{\partial \mathbf{u}^P}{\partial t} = -\nabla p + \Delta \mathbf{u}^P. \quad (\text{E.2})$$

Тороидальная часть поля \mathbf{u}^T может быть записана в виде

$$\mathbf{u}^T = -\mathbf{r} \times \nabla T, \quad \langle T \rangle = 0. \quad (\text{E.3})$$

Из

$$\mathbf{r} \times \nabla \left(\frac{\partial T}{\partial t} - \Delta T \right) = 0 \quad (\text{E.4})$$

следует, что

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \Delta T = 0 \quad (\text{E.5})$$

для $r_1 \leq r \leq r_0$. $T = 0$ для $r = r_0$ и $r = r_1$.

Представим решение уравнения (E.5) в виде

$$T = \sum_{l \geq 1, |m| \leq l} T_l^m(r) Y_l^m(\theta, \varphi) e^{-\lambda t}, \quad (\text{E.6})$$

где $Y_l^m(\theta, \varphi)$ – сферические функции. После подстановки (E.6) в (E.5) имеем уравнение на собственные значения:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d^2}{dr^2} (r T_l^m) - \frac{l(l+1)}{r^2} T_l^m + \lambda T_l^m = 0, \quad (\text{E.7})$$

где

$$T_l^m = C1_l^m j_l(\sqrt{\lambda} r) + C2_l^m y_l(\sqrt{\lambda} r) \quad (\text{E.8})$$

и j_l, y_l – сферические функции Бесселя первого и второго рода, λ – искомое собственное значение, $C1, C2$ – неизвестные константы. Потребовав выполнение граничных условий для T получим систему двух уравнений для $C1$ и $C2$. Из условия разрешимости системы (равенства нулю детерминанта) получим трансцендентное уравнение для λ . Далее, без потери общности, положив $C1 = 1$, легко получить выражение для $C2$. Вычисления были сделаны с использованием пакета символьной алгебры MAPLE. Значения приведены в Таблице E.1.

Аналогично для полоидальной компоненты получим:

$$\mathbf{u}^P = - \times (\mathbf{r} \times \nabla S,) \quad \langle S \rangle = 0. \quad (\text{E.9})$$

Тогда

$$\nabla \times \left(\mathbf{r} \times \nabla \left[\frac{\partial S}{\partial t} - \Delta S \right] \right) = \nabla p, \quad (\text{E.10})$$

| | | | |
|-----------|--------|--------|--------|
| 1 | 1 | 2 | 3 |
| λ | -32.58 | -41.07 | -53.51 |
| $C2_l$ | 2.35 | 0.67 | 0.30 |

Таблица Е.1: Собственные значение λ и коэффициент $C2_l$ для тороидальной компоненты решения.

ИЛИ

$$r \Delta \left[\frac{\partial S}{\partial t} - \Delta S \right] - \nabla \left(p + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left[\frac{\partial S}{\partial t} - \Delta S \right] \right) \right) = 0. \quad (\text{E.11})$$

Последнее уравнение эквивалентно системе уравнений

$$p + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left[\frac{\partial S}{\partial t} - \Delta S \right] \right) = \langle p \rangle, \quad (\text{E.12})$$

$$\Delta \left[\frac{\partial S}{\partial t} - \Delta S \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \langle p \rangle = 0, \quad (\text{E.13})$$

$$\Delta p = 0 \quad (\text{E.14})$$

с

$$S = \frac{\partial S}{\partial r} = 0 \quad r = r_1, r_0. \quad (\text{E.15})$$

Из второго уравнения следует

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \Delta S = h, \quad \Delta h = 0, \quad \langle h \rangle = 0. \quad (\text{E.16})$$

Решение может быть переписано в виде

$$S = \sum_{l \geq 1, |m| \leq l} S_l^m(r) Y_l^m(\theta, \varphi) e^{-\lambda t}, \quad (\text{E.17})$$

$$h = \sum_{l \geq 1, |m| \leq l} c_l^m x^l Y_l^m(\theta, \varphi) e^{-\lambda t}, \quad (\text{E.18})$$

Тогда уравнение для собственных значений имеет вид:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d^2}{dr^2} (r S_l^m) - \frac{l(l+1)}{r^2} S_l^m + \lambda S_l^m = c_3^m r^l + c_4^m r^{-l-1}. \quad (\text{E.19})$$

Общее решение уравнения (E.19) имеет вид

$$S_l^m = C_3^m j_l(\sqrt{\lambda} r) + c_3^m \frac{r^l}{\lambda} + C_4^m y_l(\sqrt{\lambda} r) + c_4^m \frac{r^{-l-1}}{\lambda}. \quad (\text{E.20})$$

Из граничных условий (E.15) следует

$$\begin{aligned} C_3^m j_l(\sqrt{\lambda}) + c_3^m \frac{1}{\lambda} + C_4^m y_l(\sqrt{\lambda}) + c_4^m \frac{1}{\lambda} &= 0, \\ C_3^m \sqrt{\lambda} j_l'(\sqrt{\lambda}) + c_3^m \frac{l}{\lambda} + C_4^m \sqrt{\lambda} (y_l'(\sqrt{\lambda})) - c_4^m \frac{l+1}{\lambda} &= 0, \\ C_3^m j_l(\sqrt{\lambda} r_1) + c_3^m \frac{r_1^l}{\lambda} + C_4^m y_l(\sqrt{\lambda} r_1) + c_4^m \frac{r_1^{-l-1}}{\lambda} &= 0, \\ C_3^m \sqrt{\lambda} j_l'(\sqrt{\lambda} r_1) + c_3^m \frac{l r_1^{l-1}}{\lambda} + C_4^m \sqrt{\lambda} y_l'(\sqrt{\lambda} r_1) & \\ - c_4^m \frac{(l+1) r_1^{-l-2}}{\lambda} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

Как и в предыдущем случае, находим λ из условия разрешимости системы (E.21). Положив $C_3 = 1$, находим константы c_3 , C_4 , c_4 (см. Таблицу E.2). Для давления уравнение имеет вид:

$$p + \frac{\partial}{\partial r} (r h) = \langle p \rangle \quad (\text{E.22})$$

с

$$p = \sum_{l \geq 1, |m| \leq l} p_l^m r^l Y_l^m(\theta, \varphi) e^{-\lambda t}. \quad (\text{E.23})$$

| l | 1 | 2 | 3 |
|-----------|---------|---------|---------|
| λ | -109.22 | -105.55 | -106.20 |
| $C2_l$ | -18.50 | -8.73 | -37.62 |
| $C4_l$ | 2.63 | -.21 | -3.91 |
| $c4_l$ | -10.94 | -1.66 | -2.62 |

Таблица E.2: Собственные значение λ и коэффициенты $c3$, $C4$, $c4$, для полой-дальной компоненты решения.

Тогда

$$p_l^m = (l + 1)c3^m r^l + (l + 1)c4^m r^{-l}, \quad l \geq 1 \quad (\text{E.24})$$

и $p_0^0 = \langle p \rangle$, $\Delta \langle p \rangle = 0$

$$\frac{d^2}{dx^2} (r \langle p \rangle) = 0. \quad (\text{E.25})$$

В заключение отметим, что как и в хорошо известном случае для свободных мод затухания магнитного поля собственные числа не зависят от m (см. объяснение этого факта на качественном уровне для магнитного поля в [181]).

Подробное изложение данного подхода для сферы со свободной границей можно найти в [182].

Литература

- [1] Larmor, J. How could a rotating body such as the Sun become a magnet. *Rep. 87th Meeting Brit. Assoc. Adv Sci., Bournemouth*, P.159, 1919.
- [2] Моффат Т. *Возбуждение магнитного поля в проводящей среде*. М. Мир., 1980, 380С.
- [3] Zeldovich, Ya.B., Ruzmaikin, A.A., Sokoloff, D.D. *Magnetic fields in astrophysics*. NY. Gordon and Breach, 1983, 364P.
- [4] Паркер Е.Н. *Космические магнитные поля*. М., Мир., 1982, Т. 1, 2. 123С.
- [5] Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д., Шукуров А.М. *Магнитные поля галактик*. М. Наука, 1988, 279С.
- [6] Вайнштейн С.И., Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А. *Турбулентное динамо в астрофизике*. М. Наука, 1980, 352С.
- [7] Вайнштейн С.И. *Магнитные поля в космосе*. М. Наука, 1983, 240С.

- [8] Chandrasekhar, S. *Hydrodynamics and hydromagnetic stability*. Dover Publications, Inc., NY, 1981, 654P.
- [9] Glatzmaier, G.A. and Roberts, P.H. A three-dimension self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal. *Nature*, V.377, P.203–209., 1995.
- [10] Glatzmaier, G.A. and Roberts, P.H. A three-dimension convective dynamo solution with rotating and finitely conducting inner core and mantle. *Phys. Earth Planet. Inter.*, V.91, P.63–75., 1995.
- [11] Glatzmaier, G.A. and Roberts, P.H. An anelastic evolutionary geodynamo simulation driven by compositional and thermal convection. *Physica D*. V.97, P.81–94., 1996.
- [12] Harland, W.B., Armstrong, R., Cox, A., Craig, L., Smith, A., Smith, D. *A geologic time scale*. NY, 1989, 230P.
- [13] Merrill, R.T., McElhinny, M.W. *The Earth's magnetic field*. London: Academic Press., 1984, 320P.
- [14] Ермушев А.В., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д. Фрактальный характер последовательности геомагнитных инверсий. *Магнитная гидродинамика*, Т.4. С.8-15, 1992.
- [15] Иванов С.С. Самоподобие последовательности инверсий геомагнитного поля. *Геомагнетизм и Аэронаука*, Т.33., N₅ С.181-190, 1994.

- [16] Anufriev, A., Sokoloff, D. Fractal properties of geodynamo models. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.*, V.74. P.207–218, 1994.
- [17] Gaffin, S. Analysis of scaling in the geomagnetic polarity reversal record. *Phys. Earth Planet. Inter.*, V.57. P.284–290., 1989.
- [18] Федер Е. *Фракталы*. М. Мир., 1991. 260С.
- [19] Рикитаки Т. *Электромагнетизм и внутреннее строение Земли*. Л.: Недра, 1968, 332С.
- [20] Печерский Д.М., Решетняк М.Ю., Соколов Д.Д. Фрактальный анализ временной шкалы геомагнитной полярности. *Геомагнетизм и Аэронавтика.*, Т.37, №4, P.132-142., 1997.
- [21] Печерский Д.М. Некоторые характеристики геомагнитного поля за 1700 млн. лет. *Физика Земли*, Т.2. С.28-36, 1997.
- [22] Cox, A. Length of geomagnetic polarity intervals. *J. Geophys. Res.*, V.73. P.3247–3253., 1968.
- [23] Шипунов С.В., Трубихин В.М. Анализ шкалы геомагнитной полярности. *Физика Земли.*, Т.9. P.58–64., 1994.
- [24] Петрова Г.Н., Нечаева Т.Б., Пospelова Г.А. *Характерные изменения геомагнитного поля в прошлом*. М. Наука, 1992, 176С.

- [25] Гурарий Г.З., Багин В.И., Гарбузенко А.В., Решетняк М.Ю., Трубихин В.М., Назаров Х. Стационарное геомагнитное поле хрона Матуяма и субхрона Харамильо (Западная Туркмения). *Физика Земли*, №7, С.31–42., 2000.
- [26] Гурарий Г.З. *Геомагнитное поле во время инверсий в позднем кайнозое*. М. Наука, 1988, 208С.
- [27] Holschneider, M. *Wavelets: An Analysis Tool*. Oxford. Oxford University Press., 1995, 455Р.
- [28] Добеши И. *Десять лекций по вейвлетам*. Ижевск. Регулярная и хаотическая динамика., 2001, 464С.
- [29] Бураков К.С., Галягин Д.К., Начасова И.Е., Решетняк М.Ю., Соколов Д.Д., Фрик П.Г. Вейвлет анализ напряженности геомагнитного поля за последние 4000 лет. *Физика Земли*, Т.9. С.773-778., 1998.
- [30] Clube, S.V.M., Napier, W.M. Galactic dark matter and terrestrial periodicities. *Q.J.R.astr. Soc.*, V.37. P.617-642, 1996.
- [31] Бурлацкая С.П. *Изучение древнего геомагнитного поля*. М. Мир, 1987, 247С.
- [32] Леви П. *Стохастические процессы и броуновское движение*. М. Наука., 1972, 464С.

- [33] Зельдович Я.Б., Соколов Д.Д. Фракталы, автомодельность, промежуточная асимптотика. *Успехи физ. наук.*, Т.146. N₃. С.493–506, 1985.
- [34] Parker, E. N. Hydromagnetic dynamo models. *ApJ.*, V.122, P.293–314, 1955.
- [35] Брагинский С.И. К теории гидромагнитного динамо. *Геомагнетизм и Аэрономия*. Т.47, N₆, С.2178–2186., 1964.
- [36] Краузе Ф., Рэдлер К.-Х. *Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо*. М. Мир, 1984, 320С.
- [37] Каулинг Т.К. *Магнитная гидродинамика*. М., Изд. Ин. Лит., 1959, 132С.
- [38] Брагинский С.И. Почти аксиально-симметричная модель гидромагнитного динамо Земли. *Геомагнетизм и Аэрономия*. Т.18, N₂, С.340–351., 1978.
- [39] Braginsky, S.I., Roberts, P.H. A model-Z geodynamo. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*. V.38, N₄, P.327–349., 1987.
- [40] Брагинский С.И. Магнитные волны в ядре Земли. *Геомагнетизм и Аэрономия*. Т.7, N₆, С.1050–1062., 1967.
- [41] Braginsky, S.I. Magnetic waves in the core of the Earth. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*. V.14, P.189–208., 1980.

- [42] Anufriev, A. An α -effect on the core mantle boundary. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*. V.57, P.135–146., 1991.
- [43] Hollerbach, R., Jones, C.A. Influence of the Earth's inner core on reversals. *Nature*, V.365, P.541–546., 1993.
- [44] Hollerbach, R., Jones, C.A. A geodynamo model incorporating a finitely conducting inner core. *Phys. Earth Planet. Inter.*, V.75, P.317–325., 1993.
- [45] Gubbins, D., Roberts, P.H., editor. *Magnetohydrodynamics of the Earth's core*. in Geomagnetism (ed. J.A. Jacobs). V.2. Academic Press, 1987, 518P.
- [46] Roberts, P. H. Kinematic dynamo models. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A.*, 272, P.663–668., 1972.
- [47] Ануфриев А.П., Решетняк М.Ю., Хейда П. Влияние внутреннего ядра на генерацию магнитного поля в модели $\alpha\omega$ -динамо. *Геомагнетизм и Аэрномия*, 37, N $\underline{\circ}$ 1, С.161–166, 1997.
- [48] Прист Э.Р. *Солнечная магнитогидродинамика*. М.Мир, 1985, 592С.
- [49] Обридко В. Н. *Частное сообщение*. , 2002.

- [50] Olson, P., Hagee, V.L. Dynamo waves and palaeomagnetic secular variation. *J. R. Astr. Soc.*, 88, P.139–146, 1987.
- [51] Печерский Д. М., Решетняк М. Ю., Соколов Д. Д. Фрактальный анализ временной шкалы геомагнитной полярности. *Геомагнетизм и Аэрономия*, 4, С.132, 1997.
- [52] Hollerbach, R., Ierley, G.R. A model α^2 in the limit of asymptotically small viscosity. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.*, V.56. P.133–140., 1991.
- [53] Abramowitz, M., Stegun, I. (eds.). *Handbook of the mathematical functions*. Dover Publications, NY., 1968, 534P.
- [54] Ануфриев А.П., Решетняк М.Ю., Соколов Д.Д. Оценка динамо-числа в модели турбулентного α -эффекта для жидкого ядра Земли. *Геомагнетизм и Аэрономия*, 37, №5, С.141–146, 1997.
- [55] Решетняк М.Ю., Павлов В.Э. О различных режимах генерации геомагнитного поля за последние 165 млн. лет. *ДАН (Геофизика)*, Т. 372, С.683–686, 2000.
- [56] Opdyke, N. D. and Channell, J. E. T. *Magnetic Stratigraphy*. Academic Press, San Diego., 1996, 346p.
- [57] Gallet, Y., Hulot, G. Stationary and nonstationary behavior within the geomagnetic polarity timescale. *Geophys. Res. Lett.*, V.24, №15, P.1875–1878., 1997.

- [58] Perrin, M., Shcherbakov, V. . *J. Geomag. Geoelectr.*, V.49, P.601–614., 1997.
- [59] Jones, G.M. . *J. Geophys. Res.*, V.82, N_o11, P.1703–1709., 1977.
- [60] Печерский Д. М., Решетняк М. Ю., Соколов Д. Д., Хейда П. Модели $\alpha\omega$ -динамо в свете палеомагнитных наблюдений. *Геомагнетизм и Аэрономия*, 38, N_o4, С.108–117, 1998.
- [61] Диденко А.Н. . . *Физика Земли*, 5, С.3–10, 1998.
- [62] Старченко С.В. *Суперкритические МГД динамо*. Борок, 1998, 153Р.
- [63] Soward, A.M. A kinematic theory of large magnetic Reynolds number dynamos. *Phil. Trans. R. Soc. London, A. V. A272*, P.431–438., 1972.
- [64] Anufriev, A., Cupal, I., Hejda, P. The weak Taylor state in an $\alpha\omega$ -dynamo. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*. V.88, P.15–28., 1995.
- [65] Менье Н., Нем-Риб Э., Соколов Д.Д. Динамо-волна в $\alpha^2\omega$ -приближении. *Астрон. ж.*, 73, С.469–475, 1996.
- [66] Жарков В.М. *Внутреннее строение Земли и планет*. М.Наука, 1978, 192С.

- [67] Жарков В.М., Трубицын В.П. *Физика планетных недр*. М.Наука, 1980, 448С.
- [68] Russel, C. T. Magnetic fields of the terrestrial planets. *Nature*, V.98, N_oE10, P.18 681-18 695., 1993.
- [69] Connerney, J. E. P. Magnetic fields of the Outer planets. *J. Geophys. Res.*, V.98, N_oE10, P.18 659-18 679, 1993.
- [70] Blackett, F. R. S. The magnetic field of massive rotating bodies. *Nature*, 159, P.658–666, 1947.
- [71] Arge, C. N., Mullan, D. J. Dolginov, A. Z. Magnetic moments and angular momenta of stars and planets. *ApJ.*, 443, P.795–803, 1995.
- [72] Russel, C. T. Re-evaluating Bode's law of planetary magnetism. *Nature*, V.272, P.147., 1978.
- [73] Russel, C. T. Scaling law test and two predictions of planetary magnetic moments. *Nature*, V.281, P.552–553., 1979.
- [74] Cain, J.C., Beaumont, P., Holter, W., Wang, Z. The magnetic Bode fallacy. *J. Geophys. Res.*, V.100, N_oE5, P.9 439-9 454., 1995.
- [75] Rädler, K.-H. Mean-field theories of planetary magnetism. *Adv. Space Res.*, V.1, P.219–229., 1981.

- [76] Ruzmaikin, A. A., Starchenko, S. V. On the origin of Uranus and Neptune magnetic fields. *Icarus*, V.93, P.82–87., 1991.
- [77] Phillips, J. L., Russel, C. T. Upper limit on the intrinsic magnetic field of the Venus. *J. Geophys. Res.*, V.92, N_oA3, P.2 253-2 263., 1987.
- [78] Baliunas, S., Soon, W., Sokoloff, D. Magnetic field and rotation in lower main sequence stars: An empirical time-dependent magnetic Bode relation? *ApJLet.*, 457, P.L99–L102, 1996.
- [79] Busse, F. H. Generation of planetary magnetism by convection. *Phys. Earth Planet. Int.*, V.12, N_o. 1–2, P.350–358., 1976.
- [80] Curtis, S.A., Ness, N.F. Magnetostrophic balance in planetary dynamos predictions for Neptune's magnetosphere. *J. Geophys. Res.*, V.91, N_oA10, P.11 003-11 008., 1986.
- [81] Bloxham, J. Simultaneous stochastic inversion for geomagnetic field and secular variation. 1. A large-scale inverse problem. *J. Geophys. Res.*, V.92, N_oB11, P.11 597-11 608, 1987.
- [82] Eltayeb, I. A., Roberts, P. H. On the hydromagnetic of rotating fluids. *Astrophys. J.*, V.162, P.699–701., 1970.

- [83] Hide, R. and Roberts, P.H. How strong is the magnetic field in the Earth's liquid core? *Phys. Earth Planet. Int.*, V.20, P.124–128., 1979.
- [84] Brandenburg, A., Krause, F., Meinel, R., Moss, D., Tuominen, I. The stability of nonlinear dynamos and the limited role of kinematic growth rates. *Astron. Astrophys.*, V.213, N \underline{o} . 1–2, P.411–422., 1989.
- [85] Sarson, G. R., Jones, C. A., Zhang, K., Schubert, G. Magnetoconvection dynamos and the magnetic fields of Io and Ganymede. *Science*, V.276, P.1106–1108., 1997.
- [86] Anufriev, A., Cupal. Characteristic amplitudes in the solution of anelastic geodynamo model. *Phys. Earth Planet. Int.* V.88, P.15–28., 1995.
- [87] Rüdiger, G., Kichatinov, L. L. Alpha-effect and alpha-quenching. *A&A.*, V.269, P.581–588., 1993.
- [88] Vainshtein, S. I., Cattaneo, F. Nonlinear restrictions on dynamo action. *Ap. J.*, V.393, P.165–169., 1992.
- [89] Kraichnan, R. H. Inertial range spectrum of hydromagnetic turbulence. *Phys. Fluids.*, V.8, P.1385–1387., 1965.
- [90] Olson, P. Dynamo waves and palaeomagnetic secular variation. *Phys. Earth Planet. Int.*, V.33, P.260–274, 1983.

- [91] Калинин Ю.Д. Астроблемы и геомагнитные инверсии. *Геомагнетизм и Аэронаука*, Т.33, №4, С.161–164, 1993.
- [92] Loper, D. E. On the correlation between mantle plume flux and the frequency of reversals of the geomagnetic field. *Geophys. Res. Lett.*, 19, P.25–34, 1992.
- [93] Kuang, W. and Bloxham, J. An Earth-like numerical dynamo model. *Nature*, V.389, 371–374, 1997.
- [94] Jones, C.,A. Convection-driven geodynamo models. *Phil. Trans. R. Soc. London, A*. V.358, P.873–897., 1987.
- [95] Tilgner, A. & Busse, F.H. Finite amplitude in rotating spherical fluid shells. *J. Fluid. Mech.*, V.332, P.359–376., 1997.
- [96] Jones, C. A., Longbottom, A. W. and Hollerbach, R. A self-consistent convection driven geodynamo model, using a mean field approximation. *Phys. Earth Planet. Inter.*, V.92, P.119–141., 1995.
- [97] Christensen, U.R., Aubert, J., Cardin, P., Dormy, E., Gibbons, S., Glatzmaier, G.A., Grote, E., Honkura, Y., Jones, C., Kono, M., Matsushima, M., Sakuraba, A., Takahashi, F., Tilgner, A., Wicht, J., Zhang, K. A numerical dynamo benchmark. *Phys. Earth Planet. Inter.*, V.128, P.25–34., 2001.

- [98] Bullard, E.C. and Gellman, H. Homogeneous dynamos and terrestrial magnetism. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, V. A 247, P.213–278., 1954.
- [99] Canuto, C., Hussini, M. Y., Quarteroni, A., Zang, T. A. *Spectral methods in Fluids Dynamics*. Springer-Verlag, 1988, 567P.
- [100] Heinrich, C.J., Pepper, D.W. *Intermediate finite element method*. Taylor & Francis, New York., 1999, 585P.
- [101] Яновский Б.М. *Земной магнетизм. Т.1, 2*. Ленинградский Университет,, 1964, 567С.
- [102] Паркинсон У. *Введение в геомагнетизм*. М.Мир, 1986, 528С.
- [103] Hejda, P., Reshetnyak, M. The grid-spectral approach to 3-d geodynamo modelling. *Computers & Geosciences.*, V.26, P.167–175., 2000.
- [104] Gubbins, D. Numerical solutions of the kinematic dynamo problem. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, V. A 274, P.493–521., 1973.
- [105] Dudley, M.L., James, R.,W. Time dependent kinematic dynamos with stationary flows. *Proc. R. Soc. Lond.*, V. A 425, P.407–429., 1989.
- [106] Hejda, P., Cupal, I., Reshetnyak, M. On the application of grid-spectral method to the solution

- of geodynamo equation. *Dynamo and Dynamics, a Mathematical Challenge, Nato Sci. Ser. (ed. P.Chossat, D.Armbruster, I.Oprea), Kluwer Acad. Publ. II/26, P.181–187.*, 2001.
- [107] Stewartson, K. On almost rigid rotations. *J. Fluid. Mech.*, V.26, P.131-144, 1966.
- [108] Proudman, I. The almost-rigid rotation of viscous fluid between concentric spheres. *J. Fluid. Mech.*, V.1, P.505–516., 1956.
- [109] Hollerbach, R. Magnetohydrodynamic Ekman and Stewartson layers in a rotating spherical shell. *Proc. Roy. Soc. London*, V.A444, P.333–346., 1956.
- [110] Kleorin, N., Rogachevskii, I., Ruzmaikin, A., Soward, A. Axisymmetric flow between differentially rotating spheres in a dipole magnetic field. *J. Fluid. Mech.*, V.344, P.213–244., 1997.
- [111] Старченко С.В. *Суперкритические МГД Динамо*. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Борок, 1998, 156С.
- [112] Anufriev, A.P. and Hejda, P. Numerical results of the hydromagnetic 2-d dynamo models with the solid inner core. The study of Ekman and Stewartson layers. *Acta Astron. et Geophys. Univ. Comenianaе*. V.XIX, P.79–94., 1997.

- [113] Dormy, E., Cardin, P., Jault, D. MHD flow in a slightly differentially rotating spherical shell, with conducting inner core, in a dipolar magnetic field. *Phys. Earth Planet. Int.*, V.160, P.15–30., 1998.
- [114] Anufriev, A.P. and Hejda, P. The influence of a homogeneous magnetic field on the Ekman and Stewartson layers. *Studia geoph. et geod.* V.42, P.254–260., 1998.
- [115] Song, X., Richards, P. G. Observational evidence for differential rotation of the Earth's inner core. *Nature*, V.382, P.221–224., 1996.
- [116] Laske, G., Masters, G. Limits on differential rotation of the inner core from an analysis of the Earth's free oscillations. *Nature*, V.402, P.66-69., 1999.
- [117] Vidale, J. E., Dodge, D. A. Earle, P. S. Slow differential rotation of the Earth's inner core indicated by temporal changes in scattering. *Nature*, V.405, P.445-448., 2000.
- [118] Авсюк Ю. Н., Адушкин В. В., Овчинников В. М. Комплексное исследование подвижности внутреннего ядра Земли. *Физика Земли*, N₈, С.64–75., 2001.
- [119] Roberts, P. H. On the thermal instability of a rotating-fluid sphere containing heat sources. *Phil. Trans. R. Soc. A.*, 263, P.93–117., 1968.
- [120] Fletcher, C. A. *Computational Techniques for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, NY., 1988, 504P.

- [121] Patankar, S. V. *Numerical heat transfer and fluid flow*. Taylor & Francis, 1980, 198P.
- [122] Evans, C. R. & Hawley, J.F. Simulation of hydrodynamic flows: A constrained transport method. *Ap. J.* V.332, P.659–677., 1988.
- [123] Gilman, P. A., Miller, J. Dynamical consistent nonlinear dynamos driven by convection in a rotating shell. *Ap. J. Suppl.* V.46, P.211–238., 1981.
- [124] Kageyama, A., Watanabe, K., Sato, T. Simulation study of a magnetohydrodynamic dynamo: Convection in a rotating spherical shell. *Phys. Fluids.* V.B5, N $\underline{0}$ 8, P.2793–2805., 1993.
- [125] Anufriev, A. The influence of solid core on Earth's hydrodynamics. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics.* V.77, P.15–26., 1994.
- [126] Anufriev, A.P. and Hejda, P. Effect of the magnetic field at the inner core boundary on the flow in the Earth's core. *Phys. Earth Planet. Int.* V.106, P.19-30., 1998.
- [127] Гилл А. *Динамика атмосферы и океана. Т.1, 2.* М. Мир., 1986.
- [128] Курганский М.В., editor. *Введение в крупномасштабную динамику атмосферы.* Санкт-Петербург, Гидрометеиздат., 1993, 168С.

- [129] Aurnou, J. M., Brito, D., Olson, P.L. Mechanics of inner core super-rotation. *Phys. Earth Planet. Inter.*, V.23, P.3401–3407., 1996.
- [130] Lowes, F.J. Spatial power spectrum of the main geomagnetic field. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, V.36, P.717–725., 1974.
- [131] Kono, M., Roberts, P. H. Definition of the Rayleigh number for geodynamo simulation. *Phys. Earth Planet. Inter.* V.128, P.13-24, 2001.
- [132] Gubbins, D. The Rayleigh number for convection in the Earth's core. *Phys. Earth Planet. Inter.* V.128, P.2–12, 2001.
- [133] Melchior, P. *The physics of the Earth core*. Pergamon Press., 1986, 257P.
- [134] Braginsky, S.I. On realistic geodynamo model. *J. Geomag. Geoelectr.* V.49, P.1035–1048., 1997.
- [135] Braginsky, S.I., Roberts, P.H. Equations governing convection in Earth's core and the geodynamo. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics.* V.79, P.1–97., 1995.
- [136] Решетняк М.Ю., Соколов Д.Д., Фрик П.Г. Каскадные модели турбулентности для жидкого ядра Земли. *ДАН (Геофизика)*, Принято в печать, 2002.

- [137] Frick, P., Reshetnyak, M., Sokoloff, D. Combined grid-shell approach for convection in a rotating spherical layer. *Europhys. Lett.*, V. 59, N_o2, P.212 – 217, 2002.
- [138] Reshetnyak, M., Frick, P., Sokoloff, D. *Combined grid-shell approach for convection problem in a spherical layer*. In Advances in Turbulence IX, Proceedings of the Ninth European Turbulence Conference, ed. I. P. Castro, P. E. Hancock & T. G. Thomas, Barcelona., 2002, P.283-286.
- [139] Frisch, U. *Turbulence: the Legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, Cambridge., 1995, 296P.
- [140] Bohr, T., Jensen, M., Paladin, G. & Vulpiani, A. *Dynamical Systems Approach to Turbulence*. Cambridge University Press, Cambridge., 1998, 373P.
- [141] Desnjansky, V.N. & Novikov, E.A. . *Appl. Math. Mech.*, V.38,468–475., 1974.
- [142] Гледзер Е.Б. Система гидродинамического типа, допускающая два квадратичных интеграла движения. *ДАН СССР*, Т.209, N_o5, С.1 046-1 048., 1973.
- [143] Lozhkin, S.A., Frick, P.G. Inertial Obukhov-Bolgiano interval in shell models of convective turbulence. *Fluid Dynamics*, V.33, N_o6, С.125–140., 1998.
- [144] Frick, P., Sokoloff, D. Cascade and dynamo action in a shell model of magnetohydrodynamic turbulence. *Phys. Rev. E*, V.57, P.4 155-4 164., 1998.

- [145] Smagorinsky, J. General circulation experiments with the primitive equations: I. The basic experiment. *Monthly Weather Review*, V.91, P.99–164., 1963.
- [146] Braginsky, S.I., Meytlis, V.P. Local turbulence in the Earth's core. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics.*, V.55, P.71–87., 1990.
- [147] Канасевич Э.Р. *Анализ временных последовательностей в геофизике*. М. Недра., 1985, 400С.
- [148] Астафьева Н. Вейвлет-анализ астрономических данных. *УФН*, N $\underline{0}$ 11, С.235–239, 1996.
- [149] Frick, P., Baliunas, S.L., Galyagin, D., Soon, W.H. Wavelet analysis of stellar chromospheric activity variations. *Astrophysical Journal*, V.483. P.426-432., 1997.
- [150] Галягин Д.К., Фрик П.Г. Адаптивные вейвлеты (алгоритм спектрального анализа сигналов, известных с пробелами в данных). *Математическое моделирование систем и процессов*, N $\underline{0}$ 4, С.10–15., 1996.
- [151] Начасова И.Е., Бураков К.С. Вариации напряженности геомагнитного поля в последние четыре тысячи лет по мировым данным. *ДАН (Геофизика)*, Т.353, N $\underline{0}$ 2, С.255–259., 1997.
- [152] Начасова И.Е., Бураков К.С. Напряженность геомагнитного поля в Средней Азии во втором – первом

- тысячелетии до нашей эры. *Физика Земли*, Т.353, N₇, С.1–8., 1997.
- [153] Начасова И.Е., Бураков К.С. Вариации геомагнитного поля в Средней Азии в последние две тысячи лет. Анализ мировых данных. *Геомагнетизм и Аэронаука*, N₆, С.150–158., 1995.
- [154] Daubechies, I. *Ten lectures on wavelets*. FIAM, Philadelphia, 1992, 135p.
- [155] Начасова И.Е., Бураков К.С. Изменчивость возмущенности напряженности геомагнитного поля в последние семь тысячелетий. *Геомагнетизм и Аэронаука*, N₆, С.150–159., 1997.
- [156] Гурарий Г. З., Багин В. И., Гарбузенко А. В., Трубихин В. М., Назаров Х. Стационарное геомагнитное поле хрона Матуяма и субхрона Харамильо (Западная Туркмения). *Физика Земли*, N₁, С.33–49., 2000.
- [157] Под ред. Николаева Н.П., Гамбурцева А.Г. *Атлас временных вариаций природных процессов*. М.Наука, 1994, 176С.
- [158] Torresani В. *Analyse continue par ondelettes*. CNRS. Oxford University Press., 1995, 239P.
- [159] Галягин Д.К., Решетняк М.Ю., Соколов Д.Д., Фрик П.Г. Скейлинг геомагнитного поля и шкалы геомаг-

- нитной полярности. *ДАН (Геофизика)*, Т.360, N $\underline{04}$, С.541–544., 1998.
- [160] Галягин Д.К., Печерский Д.М., Решетняк М.Ю., Соколов Д.Д., Фрик П.Г. Вейвлет анализ геомагнитного поля в неогее. *Физика Земли*, N $\underline{04}$, С.82–89., 2000.
- [161] Burg, J.P. *A new analysis for time series data*. Institute in Signal Processing. NATO. Enschede Netherlands., 1968, 234p.
- [162] Филипов С.В. Применение метода градиентного спуска и регуляризации для определения параметров сигнала и тренда. *Препринт ИЗМИРАН АН СССР*, N $\underline{057(590)}$, 1985.
- [163] Hollerbach, R., Varenghi, C. and Jones, C. Taylor's constraint in a spherical $\alpha\omega$ -dynamo. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.*, V.67. P.3–12., 1992.
- [164] Ануфриев А.П., Решетняк М.Ю., Соколов Д.Д., Хейда П. Эволюция геомагнитного поля в модели $\alpha\omega$ -динамо. *Геомагнетизм и Аэрономия*, 37, N $\underline{02}$, С.91–95, 1997.
- [165] Петрова Г.Н., Решетняк М.Ю. О временном спектре поля вековой геомагнитной вариации и его источников. *Физика Земли*, N $\underline{06}$, С.53–60., 1999.

- [166] Решетняк М.Ю. О миграции фокусов вековой вариации. *Геомагнетизм и Аэрономия*, 36, N₁, С.143–149, 1996.
- [167] Решетняк М.Ю. *Поле вековой вариации и его свойства*. Кандидатская диссертация. Институт Физики Земли РАН., 1995, 114С.
- [168] Bloxham, J., Jackson, A. Simultaneous stochastic inversion for geomagnetic main field and secular variation. *J. Geophys. Res.*, V.94, P.15753–15762., 1989.
- [169] Langel, R.A., editor. *The main field*. in Geomagnetism (ed. J.A. Jacobs). V.1. Academic Press, 1987, 612P.
- [170] Yukutake, T. Review of the geomagnetic secular variations on the historical time scale. *Phys. Earth Planet. Inter.* V.20, P.83–91, 1979.
- [171] Золотов И.Г. О западной и экваториальной составляющих дрейфа геомагнитного поля. *Геомагнетизм и Аэрономия*, 7, N₄, С.699–1003, 1967.
- [172] Золотов И.Г., Касьяненко Л.Г. Об определении скорости западного дрейфа недипольной части геомагнитного поля. *Геомагнетизм и аэрономия*, 17, N₅, С.957–963, 1977.
- [173] Завойская И.Н. *Способ разделения вековых вариаций на поле отдельных очагов*. Киев, Наукова Думка., 1976, 125С.

- [174] Parker, E. N. The generation of magnetic fields in astrophysical bodies, iv The solar and terrestrial dynamos. *ApJ.*, V. 164, P.491–499, 1971.
- [175] Creer, K.M., Thouveny, N., Blunk, I. Climatic and geomagnetic influences on the lac du bouchet paleomagnetic SV record through the last 110 000 years. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, V.64, P.314–325., 1990.
- [176] Нечаева Т.Б., Петрова Г.Н., Варданян А.А. Вековые вариации в плейстоцене по палеомагнитным исследованиям на осадочных породах Армении (Ширанская котловина, разрез Арапи). *Физика Земли*, N₈, С.33–39., 1996.
- [177] Петрова Г.Н., Диденко Е.Ю., Варданян А.А. Вариации геомагнитного поля, записанные в осадках разреза Дзкнагет. *Физика Земли*, N₅, С.80–86., 1995.
- [178] Брагинский С.И. Происхождение магнитного поля Земли и его вековых вариаций. *Изв. АН СССР, Физика Земли*, Т.10, С.3–12., 1972.
- [179] Václav Bucha, editor. *Magnetic field and processes in the Earth's Interior*. Prague, Academia, 1983, 518P.
- [180] Брычков Ю.А., Прудников А.П. *Интегральные преобразования обобщенных функций*. М. Наука, 1977, 288с.

- [181] Backus, G., Parker, R., Constable, C. *Foundations of Geomagnetism*. Cambridge University Press, Cambridge., 1996, 369p.
- [182] Rheinhardt, M. *PhD Thesis. Untersuchungen kinematischer und dynamisch konsistenter Dynamomodelle in sphärischer Geometrie*. AIP, Berlin., 1997, 141p.