

УДК 550.383

ВРАЩЕНИЕ ВНУТРЕННЕГО ЯДРА ЗЕМЛИ В МОДЕЛИ ГЕОДИНАМО

© 2001 г. М. Ю. Решетняк

Представлено академиком В.Н. Страховым 13.11.2000 г.

Поступило 15.11.2000 г.

Одним из первых работ о влиянии внутреннего ядра Земли на процесс теплоконвекции и генерации магнитного поля в проводящем жидком ядре были работы Глацмаера и Робертса [1, 2], предсказавшие восточное направление вращения твердого ядра. Данное утверждение было достаточно неожиданным, поскольку, согласно геомагнитным данным, магнитное поле Земли дрейфует в западном направлении относительно мантии. Через два года восточное направление вращения твердого ядра было подтверждено данными сейсмологии [3]. Сейсмологам удалось, используя анизотропию внутреннего ядра, зафиксировать вращение внутреннего ядра в восточном направлении со скоростью, сравнимой по порядку величины с предсказанной в [1, 2]. В следующей работе этого направления (см. [4]) сделана попытка объяснить направление вращения внутреннего ядра, используя детальную информацию о структуре течений в [1, 2]. Характерной чертой рассмотренной модели было наличие сильной генерации магнитного поля с магнитной энергией, существенно превосходящей кинетическую энергию дифференциального вращения жидкого ядра. Авторами было показано, что на границе твердого ядра возникают два момента сил: магнитный и вязкий, приводящих к закручиванию твердого ядра.

В предлагаемой работе на примере конвекции Бусинеска рассмотрены два других случая самосогласованного вращения твердого ядра Земли, один из которых без учета магнитного поля. В этом случае вращение твердого ядра поддерживается только силами вязкости. Во второй модели рассмотрено вращение твердого ядра с учетом генерируемого магнитного поля с магнитной энергией, сравнимой по порядку величины с энергией кинетических движений жидкости. Показано, что в обоих случаях преимущественным является вос-

точное направление вращения внутреннего ядра. А именно: внутреннее ядро вращается относительно мантии в том же направлении, что и сама Земля вокруг своей оси в процессе суточного вращения, а влияние магнитного поля на направление вращения твердого ядра оказывается несущественным. Рассмотренные предельные случаи тепловой конвекции в жидком ядре Земли при слабом магнитном поле или в его отсутствие дополняют современные мировые модели самосогласованного вращения твердого ядра Земли [1–3] и позволяют выделить наиболее важные эффекты, связанные с этим явлением. Полученные результаты являются фундаментальными в области знаний как о нашей планете, так и о других планетах Солнечной системы со сходным внутренним строением.

Конвекция в жидком ядре Земли ($r_1 < r < r_0$) радиуса $L = r_0$ может быть описана системой уравнений Бусинеска в безразмерном виде, включающей уравнение движения несжимаемой жидкости ($\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$):

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla p + \mathbf{F} + \text{Pr} \Delta \mathbf{V} \quad (1)$$

с нулевыми граничными условиями для поля скорости \mathbf{V} на границах жидкого ядра и уравнение для отклонений поля температуры T от заданного адиабатического профиля температуры $T_0 =$

$$= -\frac{1 - r_1/r}{1 - r_1} (\Delta T_0 = 0):$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\mathbf{V} \cdot \nabla (T + T_0) + \Delta T. \quad (2)$$

В качестве единиц измерения использованы: для времени — $\frac{L^2}{k}$, где k — коэффициент теплопровод-

ности, скорости — $\frac{k}{L}$, давление p в единицах

$\rho \left(\frac{k}{L}\right)^2$, температура T измеряется в единицах скачка температуры между границами r_1 и r_0 : δT_0 .

Жидкость предполагается проводящей с коэффициентом магнитной диффузии η . Начиная с некоторой пороговой величины магнитного числа Рейнольдса $R_m = \frac{VL}{\eta}$, возможна генерация маг-

нитного поля \mathbf{B} (в единицах $\sqrt{\mu\rho} \frac{k}{L}$), описываемая уравнением индукции

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) + \text{Pm} \Delta \mathbf{B} \quad (3)$$

с вакуумными граничными условиями на внешней границе. В уравнениях (1)–(3) введены следующие обозначения и параметры: число Прандтля

$$\text{Pr} = \frac{k}{\eta}, \text{ магнитное число Прандтля } \text{Pm} = \frac{k}{\eta},$$

сумма сил Архимеда, Кориолиса и Лоренца $\mathbf{F} = \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_k + \mathbf{F}_l$, где $\mathbf{F}_a = \text{PrRa}T\mathbf{1}_r$, $\mathbf{F}_k = -\text{PrTa}^{1/2}\mathbf{1}_z \times \mathbf{V}$

и $\mathbf{F}_l = -\mathbf{V} \times \text{rot} \mathbf{B}$, число Рэлея $\text{Ra} = \frac{g_0 \alpha \delta T_0 L^3}{kv}$, v –

коэффициент кинематической вязкости, число

Тэйлора $\text{Ta} = \frac{4\Omega^2 L^4}{v^2}$, Ω – угловая скорость вра-

щения Земли вокруг оси z , g_0 – ускорение свободного падения, α – коэффициент объемного расширения, $\mathbf{1}_r$, $\mathbf{1}_z$ – единичные векторы, δT_0 – характерное изменение температуры T_0 (см. более подробно используемую здесь нормировку в работе [5]). Отметим, что уравнения тепловой конвекции (1), (2) решаются только в области жидкого ядра, в то время как уравнение магнитного поля (3) решается во всей проводящей области ($r < r_0$). При этом проводимость твердого и жидкого ядер считается одинаковой.

В модели учтено вращение внутреннего ядра вокруг оси z . Источником вращения являются моменты вязкой и магнитной сил на поверхности твердого ядра. Искомое значение угловой скорости вращения внутреннего ядра ω может быть получено из уравнения момента импульса, записанного для внутреннего ядра:

$$I \frac{\partial \omega}{\partial t} = r_1^3 \left[\text{Pr} r_1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \omega \Big|_{r=r_1} \sin^3 \theta d\theta d\phi + \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} B_r B_\phi \Big|_{r=r_1} \sin^2 \theta d\theta d\phi \right], \quad (4)$$

где $I = \frac{8}{15} \pi r_1^5$ – момент инерции внутреннего ядра. Здесь первый член с правой стороны соответствует моменту вязкой силы, а второй – моменту магнитной силы (если есть магнитное поле).

Система уравнений (1)–(4) была решена спектрально-разностным методом, использованным автором в [6, 7]. Данный метод представляет собой комбинацию центрально-разностной аппроксимации по r - и θ -координатам и суперпозиции фурье-гармоник в азимутальном направлении (ϕ). Используемое разложение по фурье-гармоникам позволяет перейти к так называемому классу “2.5” моделей (см., например, [8]) с ограниченным числом гармоник по ϕ , что существенно сокращает трудоемкость вычислений. В отличие от уравнения индукции, где условие бездивергентности может рассматриваться лишь как начальное условие, уравнение Навье–Стокса в компонентах имеет четыре переменных (\mathbf{V} и p), и условие неразрывности является необходимым четвертым уравнением. Для обеспечения нулевых граничных условий, а также бездивергентности поля скорости \mathbf{V} необходимы специальные методы. Для этой цели была использована разновидность метода предиктор–корректор (см., например, [9]), так называемый “fractional-step” метод [10, 11], сочетающий в себе сравнительную простоту и обеспечивающий устойчивость решения. Работа программы была проверена на многочисленных тестах для магнитного поля (см. [7]), а также тестах для конвекции Бусинеска, включающих в себя проверку решений для свободных мод уравнения Навье–Стокса [12] и критического значения числа Рэлея начала возбуждения конвекции [13].

Система уравнений термоконвекции (1), (2) была проинтегрирована по времени для $\text{Ra} = 10^5$ и $\text{Ta} = 10^5 - 7 \cdot 10^6$, так чтобы по возможности охватить режимы конвекции с различным соотношением сил Архимеда и Кориолиса. На рис. 1 приведены временные зависимости угловой скорости вращения внутреннего ядра ω . Отметим, что с увеличением величины Ta период колебаний частоты вращения твердого ядра ω уменьшается, увеличивается амплитуда колебаний. Во всех рассмотренных случаях знак ω совпадает со знаком суточного вращения Земли Ω , однако в случаях 2–3 значение угловой скорости бывает близкое к нулю. При изменении числа Ta отно-

шение $\zeta = \sqrt{\frac{\int_{r_1}^{r_0} \mathbf{F}_a^2 dr^3}{\int_{r_1}^{r_0} \mathbf{F}_k^2 dr^3}}$, характеризующее

степень интенсивности вращения, изменялось в пределах $\zeta \in (10^{-3} - 3)$. Несмотря на тот факт, что реальные числа Тэйлора ($\text{Ta} \sim 10^{32}$) в жидком ядре Земли существенно больше рассмотренных,

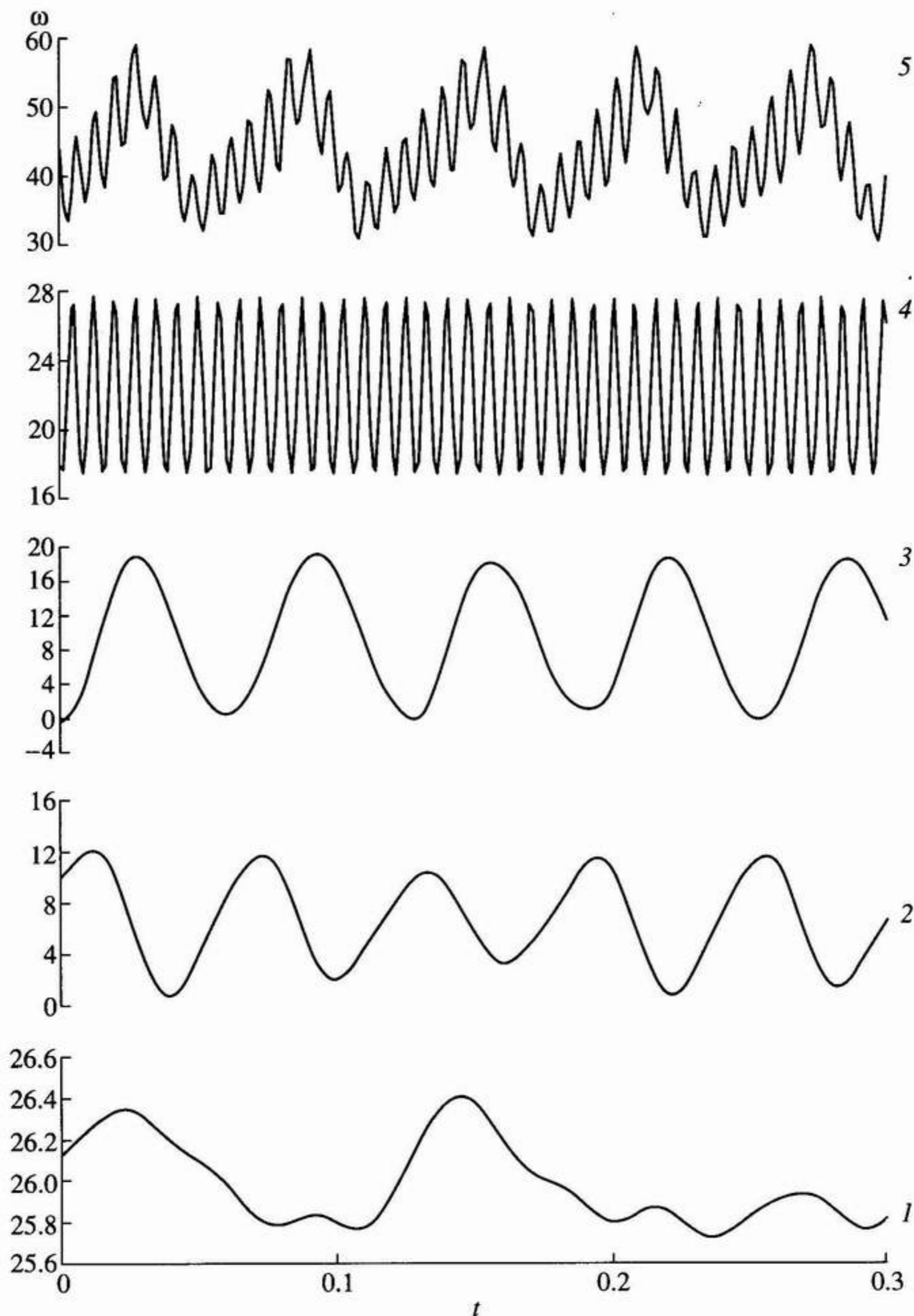


Рис. 1. Зависимость скорости вращения внутреннего ядра ω от времени (без магнитного поля) в безразмерных единицах. $Ra = 10^5$, $Ta = 10^5$ (1), $3 \cdot 10^5$ (2), $9 \cdot 10^5$ (3), $5 \cdot 10^6$ (4), $7 \cdot 10^6$ (5).

диапазон ζ соответствует режимам, когда силы вращения превосходят ахримедовские ($\zeta \ll 1$), что соответствует случаю конвекции в Земле. Рассмотрим подробнее силы, действующие на поверхность твердого ядра. Опускающая жидкость, несущая относительно бóльший угловой момент вращения, создает положительный градиент азимутальной скорости вблизи внутреннего ядра, который, в свою очередь, и является источником вязких напряжений на границе твердого и жидко-

го ядер (первый член в правой части (4)). Принципиальным является то, что жидкость поднимается вблизи оси z , мало изменяя величину момента импульса. Опускание же жидкости происходит преимущественно в экваториальных областях, что приводит к появлению дифференциального вращения и сдвиговых напряжений и, как следствие, закручиванию твердого ядра. Другим источником возникновения движений в азимутальном направлении и является течение жидкости вдоль поверх-

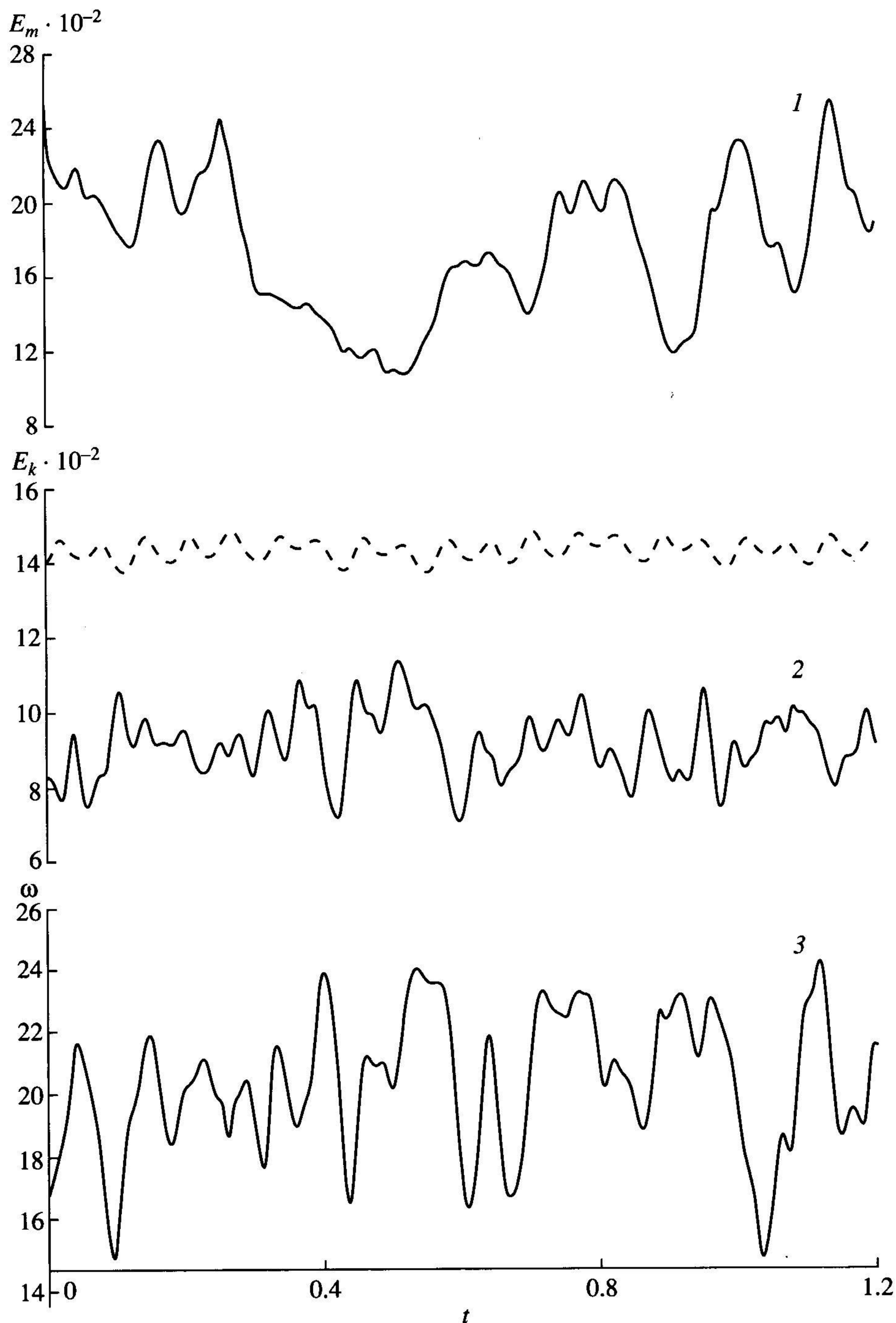


Рис. 2. Зависимость магнитной (1) и кинетической (2) энергий, скорости вращения внутреннего ядра ω (3) от времени в безразмерных единицах. $Ra = 10^5$, $Ta = 10^5$. Штриховая линия соответствует случаю без магнитного поля.

ности твердого ядра к полюсам. Эти течения также несут большой угловой момент и приводят к закручиванию твердого ядра. Последний эффект хорошо наблюдается при малых ζ , когда экмановские слои хорошо развиты.

В дополнение к немагнитному случаю (уравнения (1), (2), (4)) была рассмотрена полная сис-

тема уравнений динамо (1)–(4). Расчеты были проведены для $Ra = 10^5$, $Ta = 10^5$, $Pm = 0.55$. Величина Pm была выбрана таким образом, чтобы обеспечить приблизительно одинаковые по порядку величины значения кинетической и магнитной энергий. В целом картина с магнитным полем выглядит более сложно (рис. 2), чем ана-

логичный режим без учета сил Лоренца (см. рис. 1, 1). Поведение угловой скорости вращения внутреннего ядра ω характеризуется большей изрезанностью и увеличением амплитуды колебаний. Однако и в этом случае знак ω остается положительным. Среднее по времени и по объему отношение сил Архимеда к силам Кориолиса $\zeta = 5.3$, сил Лоренца к силам Кориолиса 0.2. Несмотря на тот факт, что магнитная энергия может превосходить кинетическую, среднее значение сил Кориолиса больше сил Лоренца. Напомним, что для Земли магнитная энергия может превосходить кинетическую на три порядка (см., например, [6]), однако это не означает, что сила Лоренца является единственно главной силой в жидком ядре. Интересным является также факт увеличения значения ζ по сравнению с немагнитным случаем в два раза, что соответствует уменьшению сил Кориолиса. Последнее связано с тем, что магнитное поле препятствует возникновению больших азимутальных скоростей (V_ϕ), являющихся основным источником сил Кориолиса. Приблизительно соотношение энергий, приходящихся на компоненты V_r , V_θ и V_ϕ без магнитного и с магнитным полем, равны: 240 : 220 : 1440 и 230 : 250 : 900. Энергия двух других компонент скорости V_r и V_θ остается практически без изменений.

Рассмотрим применимость полученных результатов к реальным планетарным условиям. Оценка характерного времени для Земли дает $\tau = L^2/k \sim (2 \cdot 10^6)^2/5 \cdot 10^{-6} = 3 \cdot 10^{10}$ лет, что сравнимо с возрастом Вселенной. Однако, поскольку рассмотренная модель позволяет учесть лишь крупномасштабные течения, использование молекулярных значений коэффициентов неоправданно. Для того, чтобы ввести поправку на мелкомасштабные течения (и, возможно, турбулентность, если она существует), необходимо использовать "конвективные" значения для коэффициентов переноса: $k_T \sim lv/3$, где l и v — масштаб турбулентности и соответствующая этому масштабу скорость (см., например, [14]). Принимая, что по порядку величины l и v сравнимы с их крупномасштабными значениями (L и V), имеем для $\tau \sim 10^5$ лет, что уже сравнимо с характерным магнитным временем $\tau_m = L^2/\eta$. Отметим, что поскольку для Земли коэффициент молекулярной η и турбулентной η_T магнитной диффузии одного порядка (2 м²/с; см., например, [15]), то магнитное время мало зависит от того, какой коэффициент будет использован. В то же время для коэффициента кинематической вязкости ν мы также должны использовать его турбулентное значение: $\nu \sim lv/3$. Суммируя сказанное, мы имеем для единицы времени $\tau \sim 10^5$ лет. Принимая в качестве характерной

безразмерной амплитуды скорости $V^* \sim \sqrt{E_K} \approx 35$ (см., например, рис. 2), имеем, что уже в размерных величинах отношение полученной скорости V^* в единицах k_T/L : V^*k_T/L к скорости западного дрейфа $V_{wd} \sim 0.2^\circ/\text{год}$ составляет порядка 0.1, что является относительно неплохим результатом для столь простой модели. Как уже упоминалось выше, различие в оценках чисел Рэлея и Тэйлора более существенно. Другим характерным недостатком рассмотренной модели является ее усеченный спектр ($M = 3$). Однако, несмотря на все эти недостатки, полученное направление вращения внутреннего ядра совпадает с наблюдаемым. Интересен также тот факт, что это направление в рассмотренном диапазоне параметров не зависит от наличия магнитного поля. Поскольку в реальных объектах энергия магнитного поля существенно больше энергии кинетических движений, а направление вращения по-прежнему восточное (см. [1, 2]), то можно говорить если не о "бессиловом" характере магнитного поля, то во всяком случае о его сравнительно малом "кпд" в гидродинамике ядра.

Автор выражает признательность группе магнитной гидродинамики, возглавляемой К.-Х. Редлером, Потсдамского астрофизического института (Германия), а также И. Цупалу и П. Хейде из Пражского геофизического института (Чехия) за плодотворные обсуждения в ходе работы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 00-05-64062) и Международного научного фонда (грант 99-00348).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Glatzmaier G.A., Roberts P.H. // Nature. 1995. V. 377. P. 203.
2. Glatzmaier G.A., Roberts P.H. // Phys. Earth and Planet. Inter. 1995. V. 91. P. 63.
3. Song X., Richards P.G. // Nature. 1996. V. 382. P. 221.
4. Aurnou J.M., Brito D., Olson P.L. // Geophys. Res. 1996. V. 23. № 23. P. 3401.
5. Gilman P., Miller J. // Astrophys. J. Suppl. Ser. 1981. V. 46. P. 211.
6. Hejda P., Reshetnyak M. // Stud. geophys. et geod. 1999. V. 43. P. 319.
7. Hejda P., Reshetnyak M. // Comput. & Geosci. 2000. V. 26. P. 167.
8. Jones C.A., Longbottom A.W., Hollerbach R. // Phys. Earth and Planet. Inter. 1995. V. 92. P. 119.
9. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989.

10. *Heinrich J.C., Pepper D.W.* Intermediate Finite Element Method. Fluid Flow and Heat Transfer Applications. L.: Taylor & Francis, 1999. P. 597.
11. *Canuto C., Hussini M.Y., Quarteroni A., Zang T.A.* Spectral methods in Fluids Dynamics. B.: Springer, 1988. P. 567.
12. *Rheinhardt M.* PhD Thesis. Untersuchungen kinematischer und dynamisch konsistenter Dynamomodelle in sphärischer Geometrie. Potsdam: Univ. Potsdam, 1997. P. 141.
13. *Chandrasekhar S.* Hydrodynamics and Hydromagnetic Stability. N.Y.: Dover, 1981. 654 p.
14. *Krause F., Rädler K.-H.* Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory. B.: Acad. Verlag, 1980. 315 p.
15. *Ануфриев А.П., Решетняк М.Ю., Соколов Д.Д.* // Геомагнетизм и аэрономия. 1997. Т. 37. № 5. С. 141.